ЕКСПЕРИМЕНТАЛНА ФИЗИКА

ЗА ЂАКЕ ВЕЛИКЕ ШКОЛЕ

ОД
Ђ. М. СТАНОЈЕВИЋА
ПРОФ. ВЕЛ. ШК.

КЊИГА ПРВА:

НАУКА О ЕНЕРГИЈИ

СА 89 СЛИКА

У БЕОГРАДУ
ДРЖАВНА ШТАМПАРИЈА КРАЉЕВИНЕ СРБИЈЕ
1897

ЦЕНА 5 ДИН.

ЕКСПЕРИМЕНТАЛНА ФИЗИКА

ЗА ЂАКЕ ВЕЛИКЕ ШКОЛЕ

ОД
Ђ. М. СТАНОЈЕВИЋА
ПРОФ. ВЕЛ. ШК.

КЊИГА ПРВА:

НАУКА О ЕНЕРГИЈИ

СА 89 СЛИКА

У БЕОГРАДУ
ДРЖАВНА ШТАМПАРИЈА КРАЉЕВИНЕ СРБИЈЕ
1897

ПРЕДГОВОР

Израђујући „*Експерименталну физику*“ за ђаке философског и техничког факултета Вел. Школе, одступио сам од уобичајенога распореда градива. Према савременом стању природних наука зна се, да су поједине природне појаве само разни облици или врсте енергије; с тога сам сматрао да је потребно да пре свега изведем и утврдим појам о енергији, излажући претходно све оно што је потребно да се зна, па да се до тога појма дође. У томе сам се излагању дотицао извесних појмова и појединости, за које ће ми можда неко и замерити, али за које сматрам, да су биле потребне да би се значај енергије што боље утврдио, имајући при том на уму не само разноликост слушалаца овога предмета већ и потребну грађу за даља проучавања.

Што се литературе тиче, служио сам се уџбеницима ове врсте немачке и француске књижевности од признатих писаца као што су: *Dr. A. Winkelmann, A. Wüllner, Müller-Pfaundler, Dr. A. Mousson, R. Klimpert, Jamin-Bouty, J. Violle, P. Dulos, H. Pellat, Chappuis-Berget*, и т. д., као и специјалним делима о енергији од којих спомињем: *E. Jouffret*, Introduction à la théorie de l'énergie; *Dr. Max. Zwerger*, Die lebendige Kraft und ihr Mass; *R. Colson*, L'énergie et ses transformations; *E. Ferrière*, La matière et l'énergie; *Max. Plank*, Das Princip d. Erhaltung d. Energie; *W*ᵐ. *Carpenter*, Energy in Nature; *B. Stewart*, Conservation de l'énergie; *P. Stallo*, La matière et la physique moderne. Одељак о апсолутном мерењу изведен је према једном ранијем раду публикованом у „Просветном Гласнику“ 1888.

Поред све пажње у коректури, поткрале су се неколике погрешке у тексту. Важније погрешке изведене су и поправљене засебно; за остале, мање важне, молим читаоце да их сами исправе.

Ђ. М. Ст.

САДРЖАЈ

СТРАНА

Део први: Приступ.

Други део: Материја и опште особине материје.

Део трећи: кретање, опште особине и врсте кретања.

Део четврти: Сила, Рад, Енергија.

СТРАНА

Део пети: Апсолутно мерење.

ПОГРЕШКЕ

СТРАНА:	РЕД:	СТОЈИ:	ТРЕБА:
53	29	13	18
87	30	сва пондерабилна материја	сва материја.
131	9	опшуе	опште
139	18	$s = \sqrt{c^2 - 2as}$	$v = \sqrt{c^2 - 2as}$
182	15	$m \frac{P}{a}$	$m = \frac{P}{a}$
187	26	јединица	сила
250	18 и 19	површином	површини
281	35	динамо	парним
289	18	из	између
300	22	10000856	10001877.

ДЕО ПРВИ

ПРИСТУП.

I. ПРИРОДА

1. **Природа и природне науке.** — Све што можемо, непосредно или посредно нашим чулима, дознати да постоји, сачињава *природу*. А науке које изучавају природу, зову се *природне науке*.

2. **Посматрање.** — Да би испитали природу у опште, служимо се на првом месту *посматрањем*. При сваком посматрању ваља обратити пажњу на све појединости појаве, коју проучавамо, и трудити се, да пронађемо између тих појединости извесне просте а нарочито сталне односе; без тога, посматрање нема никакве користи по науку.

У астрономским посматрањима на пример бележе се, што је могуће тачније, положаји појединих звезда на небу и у одређеним временима. Радећи тако још из старих времена до данас непрестано, дознали смо, како се те звезде крећу. Из тих кретања можемо сада у напред одредити место, где ће се нека звезда наћи после извесног времена; можемо на сигурно и врло тачно одредити кад ће се десити помрачење сунца или месеца и тако даље.

3. **Експеримент.** — Кад смо једну појаву посмотрили са свима њеним појединостима, онда ваља још да се осигурамо, да ли та појава зависи зајиста од тих појединости. То ћемо постићи ако ту исту појаву било у истом, било у већем или мањем размеру поновимо, служећи се

при том потребним справама и инструментима. И тако поновљена или боље рећи имитирана појава зове се *оглед* или *експеримент*.

Свако је проучавање природних појава (где је то у опште могуће), потпуније кад се изврши и експерименталним путем него само посматрањем. На једном примеру видећемо какву превагу има експеримент над самим посматрањем. Рецимо да хоћемо да проучимо падање тела на земљиној површини. Ма како тачно посматрали ми ту појаву, све што можемо дознати тим путем биће то, што ћемо наћи да већи део тела пада по правој линији, која стоји управно на површину мирне воде. У исти мах видећемо, да то не вреди за сва тела, која падају, јер ће једна јабука пасти на земљу по правој линији, а један лист, кад се откине са истога древета доспеће на земљу лутајући час на једну час на другу страну.

На против, изазовимо падање тела, служећи се потребним справама; другим речима, извршимо експериментално падање тела. Тим путем можемо удесити да тела не падају сувише брзо већ са оном брзином, која је за нас најзгоднија за посматрање; за тим ћемо се постарати да не буде ветра или других каквих страних утицаја на падање тела. Радећи тако, видећемо да сад сва тела падају по правој линији али тежа тела падају брже а лакша спорије, и да та разлика у брзини долази од отпора ваздуха, који се јаче осећа на лакшима но на тежим телима. Постараћемо се одмах да избегнемо отпор ваздуха: извршићемо наш експеримент у безваздушном простору и онда ћемо наћи да сва тела, била она тешка или лака падају по правој вертикалној линији и са једнаком брзином. До овог резултата не би никад могли доћи самим посматрањем и без експеримента.

4. **Закон.** — Кад смо једну појаву, или читаву врсту сличних појава проучили, било самим посматрањем било и експериментом, онда ћемо тражити какви стални односи постоје између њихових разних елемената. За тај циљ ми ћемо морати за време посматрања или експериментисања измерити све оне величине, које су са самим појавама у вези. И кад све те измерене величине доведемо у склад, онда се каже да смо нашли *закон* проучаваних појава. Резултат, до кога смо мало час дошли код про-

учавања падања тела, јесте закон за падање тела у безваздушном простору.

Закон мора бити правило без изузетка и по њему се морају управљати све појединости у некој појави. Ако то не буде, закон је неистинит, рђав или сувише скучен и мора се заменити другим, потпунијим.

5. Пошто врло често при проучавању извесних природних појава имамо посла са бројним вредностима при мерењу, онда закон постане сталан однос између бројних вредности величина разне природе на које смо наилазили у току проучавања. Такав се закон онда може заменити једним математичким обрасцем у коме је закон исказан на много краћи и згоднији начин. Тако на пример, ми ћемо доцније видети да код једнаког кретања тела постоји закон да су *путови сразмерни трајањима кретања.* Тај закон у коме је исказан однос између величина: *пута* и *трајања* или *времена* може се математички овако представити:

$$s = c\,t$$

где s значи вредност пута, t број времених јединица за које је кретање трајало а c једну сталну вредност, која није ништа друго до пут пређен за јединицу времена или тако звана *брзина.*

Ако имамо посла са једнако промењивим кретањем без почетне брзине, онда би нашли закон по коме је *крајња брзина (v) сразмерна трајању (t) кретања* и који се може изразити овим обрасцем:

$$v = a\,t$$

у коме је a стална вредност и значи сталну промену за коју се брзина тога тела сваке секунде промени.

Али примена математике у природним наукама не ограничава се само на исказивање извесних природних закона. Алгебарски рачун, или још општије речено, математичка анализа јесте једна врста размишљања, расуђивања и то, размишљање и расуђивање сигурно и без погрешака и помоћу кога можемо из једног или из више закона извести извесне последице, које су исто тако тачне као и сами закони из којих су оне изведене. Ето на пример из закона о промељивом кретању, који је представљен обрасцем $v = at$, простим математичким операцијама добија се образац

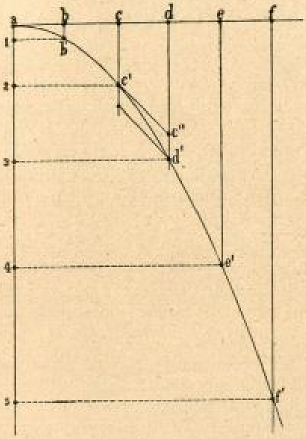
$$s = \frac{1}{2} a t^2$$

у коме *s* значи пут, *a* и *t* имају исти значај као и горе и из кога дознајемо: да је код једнако промењивог кретања *пут сразмеран квадрату времена*, за које је кретање трајало. До истога се резултата долази и експерименталним путем.

6. Има још један начин на који се могу врло згодно и тако рећи очигледно представљати поједини природни закони. То је начин *графички*. Пошто сваки алгебарски израз у аналитичкој геометрији представља извесну једну или више правих или кривих линија, то је у више случајева врло згодно дати нађеном природном закону геометријски облик. Па како још и није увек потребно наћи најпре математички образац па тек овај превести у геометријски облик, него се непосредно посмотрене величине могу одма геометријски представљати, то се врло често и цело испитивање дотичне појаве своди на изналажење геометријског облика појаве, који у исти мах има приближно исту математичку тачност као и сам образац. Непосредно графичко представљање извесних природних закона нарочито је нашло важне примене у биолошким наукама, у којима се математичке операције нису још могле толико одомаћити као на пример у физици или механици.

Примера ради, да представимо графички горе нађени образац, за пут једнако промењивог кретања ($s = \frac{1}{2} a t^2$). Узмимо да нам је секунда представљена дужином *ab* (сл. 1.) а брзина стечена на крају прве секунде (т. ј. a), дужином *a1*. Преносимо секунде по хоризонталној оси *af*, а одговарајуће путове вертикално на ниже у одговарајућим тачкама секунада. У самом почетку, т. ј. кад је $t = 0$, добићемо тачку *a*. После једне секунде т. ј. за $t = 1$, биће $s = a$; тако ћемо добити тачку b'. После две секунде (*c*) биће $s = 4a = cc'$. На крају треће секунде биће пут $s = 9a$ и представљен линијом dd' и т. д. Кад све крајње тачке путова саставимо, добијамо криву линију a b' c' d' . . . . у којој гледамо зависност путова од времена. Па како математички образац $s = \frac{1}{2} a t^2$ из кога је та линија постала, у геометрији представља параболу, то је очевидно да ће сви закони који вреде за параболу вредети и за једнако промењиво кретање тела.

7. **Основни закон.** — У врло много случајева, извесне, на први поглед различне природне појаве, показују међу собом неку сличност и њихови закони стоје међу собом у некој извесној вези. Онда није тешко увидети како ти поједини закони истичу из једног општијег, *основног закона*, који се врло често не може непосредно наћи. Такве основне законе изричу обично велики мислиоци и ти закони готово увек носе њиова имена. Тим основним законима природним и теже сва наша испитивања природе.



Сл. 1.

На пример законити односи, који постоје између слободног падања тела на земљиној површини и кретања месеца око земље; закон о елиптичним путањама планета, комета и двојних звезда; закон по коме се неко небеско тело у толико брже креће што је ближе свом центру; закон по коме и код разних планета брзине њиових кретања стоје у тачном односу према њиовом остојању од сунца; правилно и законито узајамно дејство разних планета међу собом, услед чега једна другу померају из својих путања; закон који управља приливом и одливом и многи још други слични закони и законита дејства и утицаји, могу се сматрати да проистичу из једног општег и основног закона и то из

Њутновог гравитационог закона, по коме се сва небеска тела међусобно привлаче сразмерно својим масама а изврнуто квадрату остојања. — Познато је да се трењем може произвести топлота: осовине код кола могу се загрејати до усијања; трењем два комада древета, дивљаци праве ватру као што и ми наше жижице трењем палимо. У последње време нашло се, колики напор или колико рада ваља утрошити да би једну извесну количину топлоте произвели. У топу је загрејана вода кад се у њему обртало тупо длето. И увек се нашло да се истом количином утрошенога рада увек иста количина топлоте производи. Не само трењем него и ударом може се произвести топлота; оцилом можемо укресати варницу у кремену; вешти ковачи могу самим куцањем усијати јексер. Тачним испитивањем нашло се, да се и код ударања, истом количином рада производи иста количина топлоте. До истих се резултата дошло и кад се притиском производи топлота: лед се топи кад се притисне; кад се извесна запремина ваздуха нагло сабије, може произведеном топлотом лако запаљива тела упалити. И обратно, може се топлотом произвести рад: парну машину као и гасне машине топлота креће; сунчева топлота креће ваздух и тиме покреће ветрењаче и лађе на мору; сунчева топлота испарава воду и подиже је у висину одакле падајући креће све врсте воденица. И овде је рачун показао: да се употребом једне извесне количине топлоте извесна количина рада може произвести и да би се тим радом првобитна топлота добила, кад би се тај рад, рецимо трењем у топлоту преобратио. И тако увек, кад год рада нестаје, он се претвара у топлоту и обратно кад се топлотом производи рад, мора се трошити топлота, и оба та претварања дешавају се под свима околностима у истој размери. Топлота се дакле и рад могу једно у друго претварати, и увек у истом и одређеном односу. И тај став о сталном односу или о еквиваленцији топлоте и рада јесте један основни закон.

Не треба основне законе помешати са *аксијомима* који су у природним наукама од велике важности и који садрже у себи истине, које се не изводе из других, него се или самим собом разуму или се до њих дошло дугогодишњим искуством. Такав је један аксијом: да ни једно тело не може само собом, своје стање изменити.

Тај се аксијом назива још и постојаност или инерција материје.

8. Теорија. — Строго узевши, природне би се науке могле овде зауставити својим испитивањем, јер кад су закони неке појаве познати, онда је природњак господар те појаве јер је може произвести кад хоће у истим или онаквим околностима како је њему воља. Али се у ствари наша испитивања природе ту не заустављају; ми не тражимо да само дознамо узроке извесним последицама него још и како и на кој начин извесни узроци производе те последице, дакле тражимо унутрашњи и сакривени ток саме појаве. И кад се то код неке појаве постигне онда се каже да је та појава *објашњена* или да је њој постављена *научна теорија*.

Тако на пример објаснити постанак животињске топлоте једињењем кисеоника ваздуха са угљеником венске крви, значило би поставити теорију животињске топлоте. Објаснити постанак дуге, преламањем и цепањем сунчевих зракова кроз водене капљице у атмосфери, или довести у склад узроке и последице код прилива и одлива, значило би поставити научне теорије тим природним појавама.

9. Хипотеза. — Једној се природној појави може поставити теорија само онда, кад су познати сви узроци и све последице од којих она зависи и с којима она стоји у вези. Међу тим се врло често дешава, да неки извесни узрок у објашњењу једне појаве остане непознат и скривен; онда је природњак принуђен да измисли тај узрок; тако измишљен узрок зове се *претпоставка* или *хипотеза*. Таких је хипотеза и претпоставака у раније доба било пуно у науци и са сваким их даном бива мање и мање јер једна по једна или нестају као неумесне или се напретком науке пређе непознати узроци открију и хипотезе прелазе у факта.

Извесне хипотезе имају своје вредности и заслужују да се сачувају бар привремено. Јер једна је хипотеза корисна науци, кад нам логички објашњава једну или читав низ појава, и кад нам помаже да размишљањем нађемо извесне појединости, које би нам иначе остале непримећене; хипотеза је нарочито корисна онда, кад може да предвиди извесне појаве, које су дотле биле непознате и које експеримент потврди.

Једна хипотеза, која ни с којом природном појавом из своје групе не стоји у опреци, која је предсказала и открила нове појаве и која једина изгледа као могућа, има за се много вероватноће да буде израз праве истине.

На једном ћемо примеру најбоље видети каква треба да буде добра хипотеза. Чим је човек почео озбиљније проучавати природне појаве, запитао се: шта је то светлост? Старији философи поставили су две хипотезе које су се задржале готово у подједнакој вредности све до прве половине нашега века. По једној хипотези, тако званој *емисионој*, светло тело испушта из себе веома ситне светле делиће, који се огромном брзином крећу у свима правцима по правим линијама; дошав до некога тела више или мање продиру кроза њ, или се у њ упију или се од њега одбију; кад ти делићи уђу у око, они својим ударцима о мрежњачу произведу светле утиске. По другој пак, *вибрационој* хипотези, светло тело налази се у извесном треперећем стању, његова се треперења преносе на једну веома суптилну средину, (које има свуда, која продире кроз сва тела и која се зове *етар*), од прилике онако као што се заталаса мирна вода, кад се у њу баци камен. По тој хипотези ови таласи уђу у око и заталасају оптички нерв, који онда осети светлост.

Ево дакле о једној истој појави две сасвим супротне хипотезе: ако је једна тачна, она је друга сигурно нетачна а може бити да ни једна ни друга није добра, ма да је врло тешко измислити неку трећу. Обадве врло добро тумаче простирање светлости по правој линији, као и одбијање њено; али већ код преламања светлости, емисиона хипотеза захтева да се светлост простире брже кроз воду но кроз ваздух, док на против вибрациона тражи да је ствар сасвим изврнута. И пре извесног времена, (1865) француски физичар *Фуко* (Foucault) мерио је непосредно брзину светлости у води и у ваздуху и нашао: да се светлост спорије простире кроз воду. Сам тај факт био би довољан па да се одмах одбаци емисиона хипотеза. Али читав један низ појава, проучених почетком овога века, (појаве интерференције и дифракције) не дају се никако објаснити емисионом хипотезом, док се на против тумаче врло лако и шта више морају постојати по вибрационој хипотези. Кад још додамо, да вибрациона хипотеза о свима познатим светлосним појавама даје рачуна, да је она предсказала многе друге, које су експериментом оверене, да није у опреци ни са једним познатим фактом и да је једина за данас могућа, онда се лако увиђа како вибрациона или ундулациона хипотеза светлости има велику вероватноћу да буде израз саме истине.

II. О ПОГРЕШКАМА У ИСПИТИВАЊУ ПРИРОДЕ

10. Као што смо видели, природне се појаве посматрају и мере било непосредно онакве какве их у природи налазимо било репродуциране нашим експериментима. И у једном и у другом случају, наше посматрање и мерење мора бити, што је могуће тачније. Али ма како се ми трудили да добијени резултат посматрањем и мерењем буде што тачнији, ипак, због несавршености било наших чула, било справа којима се служимо, свако ће наше посматрање или мерење бити више или мање погрешно Јер са тим треба да смо на чисто: поред све тачности и пажње са којом се израђују научне справе и оруђа, поред све тачности и пажње са којом се извесне појаве посматрају, ми данас немамо, нити ћемо кад год имати, ни апсолутно тачних справа ни апсолутно тачних посматрача. Сваки инструменат и најтачније конструисан, погрешан је; сваки посматрач ма како био спреман за тачно посматрање носи у себи клице читавог низа погрешака, које ће при посматрању неминовно учинити. Па с тога, пре него што уђемо у само посматрање природних појава, треба да се упознамо са начинима, не како ћемо посматрати без погрешака (јер је то ствар научно говорећи немогућа), него како ћемо погрешке свести на што мању меру и како ћемо у погрешном резултату одредити заостале погрешке и околишним путем приближити се правој вредности посмотрене и измерене појаве. —

Све погрешке, које се могу у научним истраживањима учинити, деле се на две групе: на *систематске* и *случајне* погрешке.

11. Систематске и случајне погрешке. — Систематске погрешке долазе од непотпуности наших справа којима посматрамо и меримо. Док су год посматрања међу собом једнака, дотле се и те погрешке јављају на исти начин; чим се начин посматрања промени и те се погрешке по извесним законима мењају. С тога је увек боље у једном низу посматрања мењати у колико је то могуће начин посматрања и мерења.

Случајне погрешке, које са свим споредни узроци изазивају, не владају се ни по каквом закону; оне су час положне час одречне, и јављају се једна за другом са свим независно једна од друге. Најбољи представник случајних погрешака јесте скретање пушчане кугле од мете, у рукама извежбаног стрелца и са непрекорном пушком. Позната је ствар, да ма како стрелац био извежбан и са ма како тачном пушком пуцао, не ће сваком куглом погодити мету. И то скретање час на једну час на другу страну од мете долази једино од несигурности нас самих и наших чула; то се скретање у сваком поједином случају не може предвидити, јер иде час лево час десно, час више мете а час испод ње. То су случајне погрешке у правом смислу речи, јер чим би метци падали више на једну, рецимо десну страну од мете, одма смо готови да то припишемо непотпуности пушке и да те погрешке уврстимо у систематске погрешке.

Сваки дакле посматрач мора пре свега тежити за тим, да систематске погрешке или са свим уклони или смањи проналазећи и уклањајући или смањујући узроке који их изазивају. Велики се део систематских погрешака уклања и смањује тачном конструкцијом справа и њиховим претходним регулисањем и удешавањем. Оне систематске погрешке, које остану и које се не могу избећи, ваља одредити и измерити, што се у осталом сразмерно лако да извршити.

Пошто смо се тако од систематских погрешака обезбедили, ваља тежити да се утицај случајних погрешака, ако не са свим избегне, а оно бар на што мању меру сведе. То се постиже разним обилазним и околишним путевима као што ћемо у осталом мало ниже видети.

12. Аритметичка средња вредност. — Кад извесну количину имамо да измеримо, најнесигурнија је она вред-

ност те количине која се само један пут одреди. Тога ради ваља сваку количину више пута посмотрити и измерити и из тако, више пута одређених вредности наћи *аритметичку средњу вредност*. Ми овде претпостављамо, да све појединце добијене вредности имају исти ступањ тачности, па с тога се у једном низу посматрања не сме ни једна величина својевољно из рачуна избацити, ма колико она одступала од свију осталих.

Рецимо да смо имали да измеримо неку дужину, које је права вредност x. Ми смо ту дужину n пута мерили па смо при свакем мерењу добили:

$$a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots\ldots\ a_n.$$

Свака се од тих *измерених вредности* више или мање разликује од оне *праве вредности*. Појединачне су разлике ове:

$$a_1 - x = \delta_1'; \ a_2 - x = \delta_2'; \ \ldots\ldots \ a_n - x = \delta_n'.$$

свака разлика наравно узета са својим знаком. То исто можемо написати и на овај начин:

$$a_1 = x + \delta_1'; \ a_2 = x + \delta_2' \ldots\ldots \ a_n = x + \delta_n'.$$

Ове величине $\delta_1', \delta_2' \ldots \delta_n'$ су случајне погрешке, неке положне а неке одречне. Ако све посмотрене вредности саберемо и збир са бројем посматрања n поделимо, добићемо средњу аритметичку вредност:

$$A = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots a_n}{n}$$

у којој ће се многе, супротнога знака погрешке потрти, а што буде још преостало, то ће се поделити на n делова, тако, да ће средња аритметичка вредност бити само за $\frac{1}{n}$ део те заостале и непотрвене погрешке нетачна. Тако ће се та средња аритметичка вредност A, врло мало разликовати од праве вредности x, па се с тога може сматрати као највероватнија вредност за x.

13. **Средња погрешка посматрања.** — Кад од поједиице посмотрених вредности $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ одузмемо средњу аритметичку вредност A, добићемо разлике:

$$a_1 - A = \delta_1,\ a_2 - A = \delta_2 \ldots\ldots a_n - A = \delta_n$$

које ће се очевидно врло мало разликовати од сличних разлика

$$\delta_1',\ \delta_2',\ \delta_3' \ldots \delta_n'$$

које добијамо између посмотрених вредности и праве вредности x.

Кад би број диференција δ_1, δ_2, $\delta_3 \ldots \delta_n$ био врло велики и кад би те диференције алгебарски сабрали, њихов би резултат био $= 0$, те према томе њихова средња вредност не би нам могла дати средњу погрешку. Да би дакле ту средњу погрешку свакога посматрања нашли, ми ћемо горње разлике квадрирати, из њих наћи средњу вредност па из ове извући квадратни корен. Према томе квадрати погрешака су

$$\delta_1^2,\ \delta_2^2,\ \delta_3^2 \ldots \delta_n^2$$

квадрат средње погрешке биће

$$\frac{\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 + \ldots \delta_n^2}{n}$$

а средња погрешка посматрања је

$$\triangle = \pm \sqrt{\frac{\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 + \ldots \delta_n^2}{n}} \ldots\ldots (1$$

$= \sqrt{\frac{S}{n}}$ ако са S означимо збир квадрата погрешака.

Још се тачнији образац за средњу погрешку добија, а нарочито ако број посматрања није велики кад се горњи збир квадрата подели, не са целокупним бројем посматрања n, већ са n — 1; према томе биће

$$\triangle' = \pm \sqrt{\frac{\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 + \ldots \delta_n^2}{n-1}} \ldots\ldots (1_1$$

$$= \pm \sqrt{\frac{S}{n-1}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1_1'$$

14. Средња погрешка резултата. — Горе поменута вредност средње погрешке вреди за свако поједино посматрање; пита се колика је погрешка средње аритметичке вредности, која је у исти мах и резултат свију посматрања?

Нашли смо мало час да је

$$A = \frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n} + \frac{a_3}{n} + \ldots \frac{a_n}{n}.$$

С друге стране знамо да је средња погрешка свакога посматрања $= \triangle$. Пошто је средња погрешка појединих чланова тога збира $\frac{\triangle}{n}$ то ће средња погрешка збира, или још боље квадратни корен из збира квадрата тих појединих погрешака бити

$$\triangle_0 = \pm \sqrt{\left(\frac{\triangle}{n}\right)^2 + \left(\frac{\triangle}{n}\right)^2 + \ldots \left(\frac{\triangle}{n}\right)^2 \text{ n пута}}$$

$$= \pm \sqrt{n\left(\frac{\triangle}{n}\right)^2}$$

$$= \pm \frac{\triangle}{\sqrt{n}} = \pm \frac{\sqrt{S}}{n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2$$

То значи: *средња погрешка резултата добија се из средње погрешке свакога посматрања, кад се та погрешка свакога посматрања подели квадратним кореном из броја посматрања.* Образац за мањи број посматрања биће према томе:

$$\triangle'_0 = \pm \frac{\triangle}{\sqrt{n(n-1)}} = \pm \sqrt{\frac{S}{n(n-1)}} \quad \ldots\ldots \quad (2_1$$

Да то објаснимо примерима: узмимо да извежбан стрелац гађа из пиштоља у мету са 50 метара даљине. Повућићемо кроз мету једну вертикалну линију, па ћемо одредити скретања појединих метака десно и лево од те линије означивши једне са + а друге са —. Ево на пример каквих је скретања било:

cm	cm	cm	cm	cm	cm	cm	cm	cm	cm
+ 5	+ 5	+ 5	−31	+ 8	+14	+45	+ 8	0	−23
− 5	+10	+29	+25	+22	+27	+10	+56	− 3	−26
−29	+13	+40	0	−15	−13	− 9	+ 8	−31	+ 9
− 7	−22	− 7	+ 7	−10	+28	+ 7	− 2	−12	+19
− 4	−23	+13	−27	+ 2	+28	−10	−37	+ 7	+36
+11	+ 1	0	−17	−23	+ 5	0	− 2	−23	− 2
+ 6	+18	− 4	+10	+ 4	+28	− 2	+ 2	−37	+10
− 6	+ 3	− 3	− 2	−14	0	+ 7	−19	−18	−11
+24	− 3	−27	−11	−12	+21	−41	+ 9	− 1	+17
−17	+25	−20	−12	+16	− 1	−14	− 2	0	− 8

Од 100 скретања 46 су положна а 48 одречна; 6 су равна нули. Аритметичка средња вредност је

$$A = + 0{\cdot}77^{cm}$$

дакле врло близу мете; средња погрешка појединих метака је

$$\triangle = \pm 18{\cdot}5.$$

Узећемо још један пример где немамо тако велики број опажања, и где ћемо употребити оне друге обрасце. Рецимо да је одређивана специф. тежина неког тела и да је извршено десет мерења. Поједине вредности мерења a, разлике δ и квадрати тих разлика δ^2 ове су:

	a	δ	δ^2
	9·662	−0·0019	0·000004
	9·673	+ 091	083
	9·664	+ 001	000
	9·659	− 049	024
	9·677	+ 131	172
	9·662	− 019	004
	9·663	− 009	001
	9·680	+ 161	259
	9·645	− 189	375
	9·654	−0·0099	0·000098
A = (Сред. вред.)	9·6639		S = 0·001002

Пошто је n=10, то је

средња погрешка појединих одредаба

$$\triangle' = \sqrt{\frac{0 \cdot 001002}{9}} = \pm 0 \cdot 011$$

средња погрешка појединих резултата

$$\triangle'_0 = \sqrt{\frac{0 \cdot 001002}{10 \cdot 9}} = \pm 0 \cdot 0033$$

15. Тежина једнога мерења. — У једном низу већих или мањих група мерења, свака поједина група мерења није подједнако поуздана. Онда се међу појединим групама прави разлика па се каже да је једна група мерења један пут, два пут, или више пута „тежа" од друге; дакле већа или мања поузданост некога мерења назива се његова „тежина" и та се тежина узима у рачун. Нарочито та тежина мерења има свога значаја, кад једну исту величину меримо двема разним методама, за које знамо у напред да нису подједнако поуздане и тачне, те према томе одређујемо тежину мерења сваке те методе. Или кад једну величину меримо по истој методи, али су мерења груписана тако да у једној групи имамо x појединих мерења, у другој y а у трећој z, онда очевидно делимични резултат, који нам свака та група даје није подједнако „тежак" и свакако је онај тежи који је из више посматрања састављен.

У колико је једна метода непоузданија, у толико треба више мерења њоме извести па да њен резултат може имати приближно једнаку вредност са резултатом оне поузданије методе. И онај број p, који показује са колико се мерења по једној методи постиже иста поузданост, као са једним мерењем по некој другој методи, зове се „тежина" ове методе према оној. Тежина је дакле релативан број.

Да видимо сада, како ћемо добити општи резултат из једног низа мерења разних тежина.

Нека су дати појединачни резултати разних група (или разних метода) мерења својим вредностима

$$a_1 \; a_2 \; a_3 \; . \; . \; . \; . \; a_n$$

и са својим одговарајућим тежинама:

$$p_1\ p_2\ p_3\ \cdots\ p_n$$

То значи, да је резултат α_1 постао из p_1 мерења; резултат α_2 из p_2, резултат α_3 из p_3 мерења и т. д. Да та мерења нису подељена на групе, ми би сва та појединачна мерења скупили и њихов збир поделили са бројем посматрања, т. ј. морали би оваку једначину поставити:

$$A = \frac{\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 + \dots \alpha_n p_n}{p_1 + p_2 + p_3 + \dots p_n} \quad \dots\dots \quad (3$$

а то је у исти мах и образац по коме се одређује аритметичка средина или општи резултат из више делимичних резултата разних тежина.

Тежина пак тог општег резултата равна је збиру тежина делимичних резултата, т. ј.

$$p = p_1 + p_2 + p_3 + \dots p_n \quad \dots\dots\dots \quad (4$$

Да би то објаснили једним примером, рецимо да смо одређивали капиларну константу воде на 15°C по истој методи, али да смо своја мерења поделили на три групе тако да у једној групи има 2, у другој 3, а у трећој 5 појединачних посматрања и мерења. Делимични резултати сваке те групе са својим тежинама ови су:

$$\alpha_1 = 14{\cdot}685, \text{ тежина } 2 = p_1$$
$$\alpha_2 = 14{\cdot}640, \text{ тежина } 3 = p_2$$
$$\alpha_3 = 14{\cdot}568, \text{ тежина } 5 = p_3$$

Општи је резултат по горњем обрасцу

$$A = \frac{14{\cdot}685 \times 2 + 14{\cdot}640 \times 3 + 14{\cdot}568 \times 5}{10} = 14{\cdot}613.$$

а његова је тежина $=10$, дакле 5 пута већа но првог, $1\frac{1}{3}$ пута већа но другог а 2 пут већа од трећег делимичног резултата. Ако узмемо да смо та мерења вршили по разним методама, онда би по првој методи морали извршити 5, по другој најмање 3 а по трећој два посматрања, па да добијемо резултате који су исто тако поуздани као број 14·613.

Али не треба из тога закључити да је и *тачност* броја 14·613, 5 пута већа од броја 14.685 из првог посматрања; $3^1/_3$ пута већа од броја 14·640 из другог посматрања и т. д. Јер тачност не расте као тежина већ само као квадратни корен из тежине.

16. Вероватна погрешка. — Осим средњих погрешака ($\triangle$ и $\triangle_0$) ваља нам се још упознати и са *вероватном погрешком.**) По својој дефиницији, вероватна је она погрешка, која један низ погрешака дели на две једнаке половине, тако, да има исто толико погрешака, које по својим вредностима стоје изнад ње колико их има, које по својим вредностима стоје испод ње.

Као што смо већ раније напоменули, ми у својим истраживањима и мерењима не можемо одредити *праву вредност* неке величине па дакле не можемо знати ни *праву погрешку*, коју смо у том послу учинили. Али помоћу *вероватне погрешке*, можемо са истом вероватноћом тврдити *да је та права, непозната погрешка одређене величине, или већа или мања од вероватне погрешке.*

Та је вероватна погрешка у извесном, врло простом односу са средњом погрешком како појединих посматрања тако и резултата, и може се из ових погрешака врло лако одредити. Ако вероватну погрешку означимо са Д, онда је вероватна погрешка појединих посматрања

$$Д = \pm 0{\cdot}6745 \triangle \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \qquad (5$$

или приближно

$$= \pm {}^2/_3 \triangle \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \qquad (5_1$$

а вероватна погрешка резултата:

$$Д_0 = \pm 0{\cdot}6745 \triangle_0 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \qquad (6$$

$$= \pm {}^2/_3 \triangle_0 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \qquad (6_1$$

17. Утицај погрешака на резултат. — Врло се често дешава, да до извесног резултата долазимо не непосредним посматрањем, него се он добија из посмотрених величина тек рачуном. Тако на пример специфичка тежина

*) Узгред ћемо напоменути између осталих погрешака још и тако звану *карактеристичну погрешку*, која нарочито прати или какву справу или какву методу. Код сваке методе мерења има једна погрешка, која се код ње најчешће јавља, која је за њу карактеристична, и по којој се оцењује ваљаност те методе.

тела одређује се разним мерењима на теразијама; модуо еластичности из разних дужинских мерења; јачина галванске струје из скретања магнетске игле и т. д. све то помоћу нарочитих образаца. И сад се пита, у колико је сам резултат, који из тих образаца излази, погрешан у след појединих погрешака оних величина, које у образац улазе.

Пошто сва непосредна мерења служе махом на то, да се њихови резултати употребе на одредбу других вредности које од њих зависе, онда се тек види колики је значај истраживања погрешака код сваког појединог мерења. Јер ове, да их назовемо делимичне погрешке (које такође могу бити већ средње погрешке било посматрања било резултата, одређене из читавог низа појединачних посматрања), унесене у образац, утицаће на један или други начин на општи резултат, који тај образац даје. С тога истраживање тога утицаја, т. ј. тражење опште погрешке резултата има више добрих страна. Пре свега она нам показује са коликом је тачношћу тај резултат добијен. Даље, тиме дознајемо, које би делове рачунања смели скратити а да нетачност знатно не повећамо. За тим дознајемо, ако је мерење сложено из више посматрања, на која посматрања треба нарочиту пажњу обратити. Најзад више пута од нас самих зависи, како ћемо сам ток и распоред посматрања извести и то рачунање погрешака упућује нас, који је начин посматрања најповољнији, т. ј. код кога начина погрешке у посматрањима најмање утичу на сам резултат и т. д.

Истраживањем утицаја погрешака посматрања на резултат, дошло се до извесних правила код појединих посматрања. Тако на пример зна се, да је код одређивања хоризонталног интензитета земљиног магнетизма најбоље, да однос оба одстојања (r_1 и r_2) скретног магнета буде 1·4. Исто се тако препоручује код мерења јачине галванске струје тангентном бусолом, да игла скреће од прилике 45° јер је онда резултат најтачнији и тако даље.

Означимо са x величину, коју посматрамо а са X тражени резултат; вредност ће x увек на неки известан начин бити везана за X, на пример ма каквим математичким обрасцем тако, да чим се промени x да се у одговарајућој мери мора променити и X; другим речима

X је функција од x. Рецимо да смо при посматрању x-а учинили погрешку δ; та ће погрешка одма утицати на резултат X кога ћемо погрешност $\triangle$ наћи, ако у образац из кога X израчунавамо у место x ставимо $x + \delta$. По себи се разуме да погрешку δ ваља у истим јединицама представити као и величину x. Очевидна је ствар да кад нам је x за δ погрешно да ни X неће бити без погрешака и да ће разлика између правога и одређенога X изнети $\triangle$.

Због тога, што су погрешке, које приликом тачних посматрања чинимо махом мале количине, може се прорачунавање опште погрешке резултата знатно упростити. У томе упрошћавању руководићемо се овим правилима:

1. Дозвољено је, да се у образац из кога се погрешка резултата израчунава, мете у место праве вредности x само њена приближна вредност. У осталом то и морамо да чинимо, пошто нам права, тачна вредност није ни позната.

2. Више пута у изразима за које резултат тражимо има и корекционих чланова; ти се чланови у истраживању опште погрешке резултата могу изоставити (осим ако баш утицај тих чланова на резултат не тражимо).

3. Кад у једном извесном мерењу има више независних посматрања, крајњи ће резултат бити изражен свима појединим посмотреним величинама. Многе од њих могу бити погрешне. Ако се тражи утицај погрешака само *једне* величине на резултат, онда се о осталима не мора водити рачун.

4. Погрешка у резултату која зависи од једне посмотрене погрешке, у опште расте сразмерно са њом. Другим речима, погрешка у резултату, т. ј. горе обележена разлика $\triangle$, даје се представити производом, у коме је погрешка δ посматране величине један чинилац.

5. Отуда следује, да су оне погрешке у резултату, које из више једнаких али супротно означених делимичних погрешака произлазе по величини једнаке, али супротно означене.

Прим. Више се пута дешава да је погрешка у резултату сразмерна не простој вредности делимичне погрешке него на пр. њеном квадрату или и производу више таких погрешака. Онда правила под 4 и 5 као и под 3 не вреде.

6. Кад је резултат постао из *више посмотрених података*, дакле кад на резултат утиче више делимичних погрешака онда према правилу 3, можемо утицај сваке поједине погрешке оделито испитивати. Свака од њих може учинити да резултат буде или сувише велики или сувише мали те дакле ће и *општа погрешка*, како се кад буду десили знаци појединих погрешака, испасти већа или мања. Општа ће погрешка бити *maximum*, кад се све делимичне погрешке узму са истим знаком. Таква се погрешка назива *„просечна погрешка"*. *Средњу пак општу погрешку* наћићемо, ако све делимичне погрешке квадрирамо и саберемо па из збира квадратни корен извучемо. На једном ће се примеру то најбоље објаснити.

Као пример узећемо обичну одредбу густине некога чврстога тела, које тоне у води. Нека је његова тежина у ваздуху $= a_1$ а у води a_2 онда је његова густина $s = \frac{a_1}{a_1 - a_2}$. Дакле ово s одговара горњему X а a_1 или a_2 горњему x. Ту би имале да дођу корекције због губитка у ваздуху као и због ширења воде али према тач. 2 о њима нећемо водити рачуна.

Према тач. 3. можемо утицај a_1 и a_2 на X, оделито да посматрамо. Ако смо при мерењу тежине a_1 учинили погрешку δ_1 онда у место a_1 треба да метемо у горњи образац $a_1 + \delta_1$, те ће према томе горњи образац добити овај облик

$$s_1 = \frac{a_1 + \delta_1}{a_1 + \delta_1 - a_2}.$$

Ако се послужимо извесним скраћивањем према обрасцу 16, чл. 18. имаћемо

$$\frac{a_1}{a_1 - a_2} \frac{1 + \frac{\delta_1}{a_1}}{1 + \frac{\delta_1}{a_1 - a_2}} = \frac{a_1}{a_1 - a_2}\left(1 + \frac{\delta_1}{a_1} - \frac{\delta_1}{a_1 - a_2}\right) =$$

$$= s - \delta_1 \frac{a_2}{(a_1 - a_2)^2}$$

Према томе је погрешка у резултату

$$\triangle_1 = -\delta_1 \frac{a_2}{(a_1 - a_2)^2}.$$

Али ми смо погрешно измерили и тежину тела у води a_2; нека та погрешка буде δ_2. С тога у горњи образац треба у место a_2 да ставимо $a_2 + \delta_2$ па ћемо добити:

$$\frac{a_1}{a_1 - (a_2 + \delta_2)} = \frac{a_1}{(a_1 - a_2)\left(1 - \frac{\delta_2}{a_1 - a_2}\right)} =$$

$$= \frac{a_1}{a_1 - a_2}\left(1 + \frac{\delta_2}{a_1 - a_2}\right) = \frac{a_1}{a_1 - a_2} + \frac{a_1\delta_2}{(a_1 - a_2)^2} =$$

$$= s + \frac{a_1\delta_2}{(a_1 - a_2)^2}$$

Дакле погрешка $\triangle_2$ која се дотиче резултата а која долази од мерења у води износи

$$\triangle_2 = \delta_2 \frac{a_1}{(a_1 - a_2)^2}$$

Укупна и највећа погрешка*) у резултату услед обе погрешке δ_1 и δ_2 у посматрању биће очевидно

$$\pm \frac{a_2\delta_1 + a_1\delta_2}{(a_1 - a_2)^2}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7$$

кад буде или a_1 сувише велико а a_2 сувише мало или обратно. Средња општа погрешка резултата је пак према тачци 6.

$$\pm\sqrt{\triangle^2_1 + \triangle^2_2} = \pm\frac{\sqrt{(a_2\delta_1)^2 + (a_1\delta_2)^2}}{(a_1 - a_2)^2} \quad \ldots\ldots \quad (8$$

Рецимо да је тежина горњега тела у ваздуху т. ј. $a_1 = 243600$ милиграма, а у води, $a_2 = 218400$ м. гр. Погрешка δ_1 нека је $= 5$ мгр. а $\delta_2 = 8$ мгр. све то у округлим цифрама. Онда ће заменом ових вредности у горње обрасце изаћи

*) т. ј. *просечна погрешка.*

$$\pm \triangle_1 = \frac{5.218400}{25200^2} = 0{\cdot}0017$$

$$\pm \triangle_2 = \frac{8.243600}{25200^2} = 0{\cdot}0031$$

У најгорем дакле случају, укупна погрешка износи $\pm$ 0·0048 а средња општа погрешка вероватно ће изнети:

$$\pm\sqrt{\triangle_1^2 + \triangle_2^2} = \pm\, 0{\cdot}0035 \text{ м. гр.}$$

2. Као други пример узмимо одредбу интензитета струје i скретањем φ тангентне бусоле, које су величине међу собом везане обрасцем

$$i = c \operatorname{tang} \varphi$$

где је c извесна стална вредност. Ако смо при читању угла φ погрешили за δ, онда ће и резултат i испасти погрешан за $\triangle$ те према томе

$$i + \triangle = c \operatorname{tang} (\varphi + \delta)$$

скраћивањем по обрасцу 20, чл. 18. имаћемо

$$i + \triangle = c\left(\operatorname{tang} \varphi + \frac{\delta}{\cos^2 \varphi}\right)$$

одакле најзад:

$$\triangle = c\frac{\delta}{\cos^2\varphi} = i\frac{\delta}{\sin\varphi\cos\varphi} = i\frac{2\delta}{\sin 2\varphi}$$

Погрешка ће $\triangle$ бити најмања кад именилац буде највећи т. ј. кад $\sin 2\varphi$ буде $= 1$ дакле кад буде $\varphi = 45^\circ$. Ето како се дошло истраживањем погрешака до закона који вреди за мерења тангентном бусолом и који смо ми у почетку овога члана нагласили.

18. **Приближни обрасци за рачунање са малим величинама.** — Кад говоримо о тачном и брижљивом мерењу извесних величина, кад се бринемо како ћемо пронаћи и најмању погрешку, коју смо неким мерењем учинили, не треба с друге стране ту тачност рђаво разумети. Свака је тачност релативна. Извесне даљине небеских тела сматрале би се према данашњем стању науке као

бескрајно тачне кад би биле познате до на неколико километара. Не би имало никаквог значаја данас обрасцима одређивати остојање два места на земљиној површини са милиметарском тачношћу. Међу тим има величина код којих се води рачун и о милионтим деловима једнога милиметра. Па с тога, кад је образац из кога се нека величина одређује мешовит, т. ј. кад у њему има и великих и малих вредности, а зна се да те мање вредности у извесним својим облицима премашају тачност која се у опште може постићи, онда се таки обрасци замењују другим, приближним обрасцима који су за рачунање згоднији, а који дају не мање тачан резултат.

Рецимо да су у неком извесном обрасцу вредности α, β, γ.... упоређене са 1 врло мале; онда су њихови квадрати α^2, β^2, γ^2.... као и њихови узајамни производи $\alpha\gamma$, $\beta\gamma$.... упоређени са њиховим нормалним вредностима α, β, γ.... тако мали ди се према 1 могу занемарити па да се ипак тачност, коју тај образац може у опште дати, не смањи. Јер нека је $\alpha = 0{\cdot}001$; онда је $\alpha^2 = 0{\cdot}000001$. Ако је још $\beta = 0{\cdot}003$, онда је $\alpha\beta = 0{\cdot}000003$. Има случајева где су хиљадити делови важни али милионити немају никакав утицај на резултат и они се могу занемарити. Измерити дужину једнога метра до на 0·1 део милиметра може се лако извршити, па с тога се те величине не би могле занемарити; али врло су ретки случајеви где се о хиљадитим деловима милиметра води рачун.

Примера ради да наведемо ове случајеве:

1) кубни коефицијенат истезања добија се из линијскога $(1 + \alpha\vartheta)$ кад се овај подигне на трећи степен:

$$1 + 3\alpha\vartheta + 3\alpha^2\vartheta^2 + \alpha^3\vartheta^3.$$

Али је готово за сва чврста тела $\alpha < 0{\cdot}00003$. Виши степени од α су дакле тако мали да ни у колико на резултат не могу утицати па за то се, из рачуна изостављају и као образац за кубни коефицијенат остаје само $1 + 3\alpha\vartheta$.

2) коефицијенат истезања живе је 0·00018; та је вредност већ по себи тако мала да се у највише случајева њени виши степени могу слободно занемарити.

Са тога се гледишта многи математички обрасци у току рачуна упрошћавају изостављањем оних чланова за које се у напред зна да својим незнатним вредностима не могу утицати на резултат. Неки од тих упрошћених образаца, којима смо се већ у прошлом члану послужили изводимо овде; лева им је страна тачна а десна приближна. Где стоје знаци $\pm$ или $\mp$ онде треба узети или само горњи или само доњи знак.

$$9)\quad (1+\alpha)^m = 1 + m\,\alpha \qquad (1-\alpha)^m = 1 - m\,\alpha$$

$$10)\quad (1+\alpha)^2 = 1 + 2\,\alpha \qquad (1-\alpha)^2 = 1 - 2\,\alpha$$

$$11)\quad \sqrt{1+\alpha} = 1 + \frac{1}{2}\alpha;\ \sqrt{1-\alpha} = 1 - \frac{1}{2}\alpha$$

$$12)\quad \frac{1}{1+\alpha} = 1 - \alpha \qquad \frac{1}{1-\alpha} = 1 + \alpha$$

$$13)\quad \frac{1}{(1+\alpha)^2} = 1 - 2\,\alpha \qquad \frac{1}{(1-\alpha)^2} = 1 + 2\,\alpha$$

$$14)\quad \frac{1}{\sqrt{1+\alpha}} = 1 - \frac{1}{2}\alpha \qquad \frac{1}{\sqrt{1-\alpha}} = 1 + \frac{1}{2}\alpha$$

$$15)\quad (1\pm\alpha)(1\pm\beta)(1\pm\gamma)\ldots = 1 \pm \alpha \pm \beta \pm \gamma \pm \ldots$$

$$16)\quad \frac{(1\pm\alpha)(1\pm\beta)\ldots}{(1\pm\gamma)(1\pm\delta)\ldots} = 1 \pm \alpha \pm \beta \ldots \mp \gamma \mp \delta \ldots$$

И ако вредности нису сувише мале али се међу собом много не разликују може се у место геометријске средине ставити аритметичка:

$$17)\quad \sqrt{p_1 p_2} = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)$$

Даље:

$$18)\quad \sin(\varphi+\alpha) = \sin\varphi + \alpha\cos\varphi;\quad \sin\alpha = \alpha$$

$$19)\quad \cos(\varphi+\alpha) = \cos\varphi - \alpha\sin\varphi;\quad \cos\alpha = 1$$

$$20)\quad \mathrm{tang}(\varphi+\alpha) = \mathrm{tg}\,\varphi + \frac{\alpha}{\cos^2\varphi};\quad \mathrm{tang}\,\alpha = \alpha$$

Као јединица за α узима се угао од $57{\cdot}3^0$, за који је лук раван полупречнику. Као приближна вредност другога степена може се узети:

$$21)\quad \sin\alpha = \alpha\left(1 - \frac{1}{6}\alpha^2\right);\ \cos\alpha = 1 - \frac{1}{2}\alpha^2;$$

$$\operatorname{tg} \alpha = (1 + \frac{1}{3} \alpha^2)$$

Најзад 22) $\log.\,\mathrm{nat}\,(x + \alpha) = \log.\,\mathrm{nat}\, x + \frac{\alpha}{x}$;

$$\log\,\mathrm{nat}\,(1 + \alpha) = \alpha.$$

19. **Интерполација.** — Више пута су за неку извесну величину, која се поступно мења, познате одговарајуће вредности у извесним важним моментима. Међу тим нама треба да знамо вредност те величине у моментима, који непосредно нису дати, али се налазе између датих момената. Онда ћемо из оближњих познатих вредности, тражену вредност интерполисати и на тај је начин одредити.

Нека је x_0 тачка на коју се извесан инструменат (који разне положаје може заузети), треба зауставити а y_0 тражена вредност која вредности x_0 одговара. Непосредним посматрањем на инструменту ми смо могли посмотрити само оближње вредности y_1 и y_2 ради којих се инструменат зауставио код тачака x_1 и x_2; y_0 лежи између y_1 и y_2 као што и x_0 лежи између x_1 и x_2.

Ако тачке x_1 и x_2 леже тако близу једна другој, да се сме узети да су у тим границама промене y-а сразмерне променама x-а онда имамо овај образац:

$$(y_0 - y_1) : (x_0 - x_1) = (y_2 - y_1) : (x_2 - x_1)$$

одакле је тражена интерполисана вредност

$$y_0 = y_1 + (x_0 - x_1) \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \quad \cdots \cdot (23$$

Примену овога обрасца видећемо између осталога код тачнога мерења теразијама.

Кад предпостављена сразмерност у растењу x-а и y-а није сигурна или и не постоји, онда је најзгодније интерполисати графичким путем. Помоћу разних вредности за x и y конструише се крива линија (узевши x за апсцисе а y за ординате те криве линије у главноме онако као што смо то радили у чл. 6) и на њој се, нађе вредност за y_0 која одговара апсциси x_0. Погрешке у посматрању испољавају се сад као неправилности те криве линије, које неправилности треба обазриво правилним цртањем криве линије изједначити.

III. САСТОЈЦИ ПРИРОДЕ

20. Материја. — Поштō смо се упознали са сигурним начинима за испитивање природе, испитајмо из чега је природа састављена? Дознати чега има у природи, није тако тешка ствар. Кад само довољно пажљиво промотримо нас саме, нашу околину, целу земљу, небеска тела, једном речи све што у природи постоји, видећемо да у природи има материје, јер све што год можемо ма на кој начин у природи посмотрити, од материје је. Према томе један саставни део природе јесте *материја*.

21. Кретање. — Ма како и ма где посматрали материју, било у нама и око нас, било на земљи и ван ње, свуда ћемо је наћи у кретању. Нема ни једног делића материје, који се не би кретао. Управо да дознамо да материја постоји треба да се креће; ако је материја у миру ми за њу не знамо; материја која би била у миру за нас на постоји. *Кретање* је дакле други саставни део природе.

Више пута, много је лакше дознати да у природи има материје но доказати, да се сва та материја креће, јер има извесних делова материје, који нам на први поглед изгледају мирни, док међу тим тек боље посмотрени, појаве нам се у кретању. Врло се дуго држало да је земља мирна, исто се тако дуго мислило да се и звезде не крећу; за биље преко зиме каже се да спава, за нас кад заспимо каже се да смо се утишали и т. д. Међу тим све се то креће и земља и звезде; у биљу и преко зиме циркулишу сокови као год што ни један делић нашега тела није у миру док спавамо. Па и онда, кад наступи смрт, кретање не престаје, јер се поједини делови мртвога тела распадају и делић по делић враћају се земљи одакле су и дошли, прелазе даље на биље, са ових на животиње па дакле и на човека, који је још у животу. И тако, посматрали ми материју у највећим или у најситнијим деловима, свуда ћемо је наћи у кретању.

Кретање је тако интимно, тако нераздвојно спојено са материјом, да ми, окуражени многобројним искуством, смемо тврдити да и онде где нас сва чула издају, где нам никакво друго срество не остаје да констатујемо битност материје, да и онда смемо тврдити да материје има, само ако имамо начина, по коме можемо закључити да има кретања. Јер ако у опште има појаве, за коју смо били у стању ма којим путем дознати да она постаје кретањем, онда са сигурношћу закључујемо, да носилац тога кретања мора бити материја па утицала она иначе непосредно на наша чула или не. Кад се бачен камен креће, ми у исти мах имамо непосредна доказа и о кретању и о материјалности камена. Кад ветар дува, ми се, на врло прост начин, уверавамо о кретању нечега али је већ теже сада непосредно опипати или видити носиоца тога кретања. И овде истина обилазним али сигурним путем дознајемо, да је то ваздух што се у ветру креће. Али има појава за које несумњиво знамо, да постају кретањем; има кретања која смо до најмањих ситница одредили, којима знамо и облик и величину и брзину па ипак, никоме до данас није испало за руком, да на делу ухвати материју, која се ту креће и која својим кретањем те појаве производи. Ми данас знамо да је и светлост и топлота извесно кретање, знамо и какво је то кретање; ми знамо и колика му је брзина, једном речи знамо са математичком тачношћу све појединости, које такво кретање прате, па ипак, нико до данас није ни опипао, ни видео ни измерио материју која се ту мора кретати; нико још није доказао, да је ма која од нама познатих, мерљивих, пондерабилних материја, носилац тога кретања.

Али окуражени безбројним опажањима да свуда, где има материје, она мора бити у кретању, ми смемо и онде, где на први поглед кретање материје не можемо констатовати да закључимо да тога кретања мора бити. Исто тако, окуражени такође безбројним искуством, да свуда где кретања има, да ту мора бити и носиоца тога кретања, да ту мора бити и материје, ми смемо свуда онде, где несумњиво нађемо да има кретања и где материју не можемо открити, да закључимо, да ту мора бити материје, која се креће. Тако смо смели још одавна да закључимо за светлост и за топлоту, за које смо рекли да постају кретањем, да ту мора бити извесне материје, која се креће и ако она, било због своје финоће, због своје суптилности, било због недовољне осетљивости наших чула и наших справа не може непосредно утицати ни на које наше чуло, ни на коју нашу справу. Шта више из кретања до којих се врло лако долази и која се са великом тачношћу мере, изведене су и све оне особине, које та суптилна, невидљива, неосетљива и немерљива, та „импондерабилна“ материја мора имати. Дато јој је и нарочито име; она се зове *етар*.

Кад дакле говоримо о материји, која испуњава природу и која се непрестано креће, ми онда разумемо сву ону материју до које долазимо или непосредно нашим чулима или чију битност закључујемо тек из кретања која она несумњиво врши и која кретања ми врло често лакше констатујемо но саму материју.

22. Има ли још чега у природи осим материје и кретања? — Врло се често у природним наукама говори о сили, а и ми ћемо се често служити речју „сила“. Шта је то сила? Има ли силе?

Ако се запитамо шта је то сила, видећемо да има мало речи, којима се тако често служимо и у обичном животу и у науци а којих је значај тако различит као код речи „сила“. Не може се толико замерити што реч „сила“ има тако разне значаје у обичном животу, али би свакако требало, да је њен значај потпуно одређен бар у науци. На несрећу није тако; и у самој механици која се сматра као наука о силама та реч има трогуби значај.*) Једни механичари (*Делоне*) држе да се свака сила даје представити теретом, те дакле мере силу килограмом. Други, као на пример *Лаплас*, мере силу брзином, коју она саопштава неком телу; они дакле мере силу метром. По трећима сила производи увек неки рад, те је дакле ваља мерити килограмометром. Таква разноликост о значају једне исте речи врло је штетна јер отуда долазе све тешкоће на које наилазе почетници кад хоће да схвате природу силе.

Ако пажљивије промотримо, шта све називамо силом и обазирући се на оно што смо до сад нашли у природи, ми ћемо видети да је сила све оно што може да *промени* извесно кретање. Многи природњаци дефинишу силу као чиниоца који *производи* кретање. Међу тим кретање не може бити произведено јер постоји. Сила може дакле само изменити а не произвести неко кретање. Кретање пак може бити измењено само кретањем и ничим више. Из тога излази да сила не постоји као

*) *M. P. de Saint-Robert* — „Qu'est-ce que la Force?“

нешто засебно, нити се може сматрати као неки особити састојак природе; под силом, којом ћемо се врло често служити, не треба замишљати нешто, што може из ничега што да створи, што може без икаквог потрошка што да измени; сила је извесно познато или непознато кретање и мери се оном истом мером којом и кретање.

23. И тако испитавши природне састојке нашли смо: да у прирроди постоји само материја и покрет, или покрет и материја. Не треба мислити да се оба та састојка природина могу одвојити један од другог. Они се јављају у исти мах и увек заједно. Па с тога ако их обадва обухватимо једном речи, можемо рећи да у природи постоји само *јестост*.

ДЕО ДРУГИ

МАТЕРИЈА И ОПШТЕ ОСОБИНЕ МАТЕРИЈЕ

24. До сада се није могло дознати ни за какав начин, којим би се количина материје у природи могла или повећати или смањити или којим би се материја могла уништити или створити. Па с тога се може поставити основни закон да је *целокупна количина материје у васиони стална и непромењива.*

Апсолутна количина материје представљена је својом *масом* која је такође стална и непромењива.

Ма на ком се месту у васиони материја налазила, и ма колика била њена маса, материја има извесних општих особина које су од ње нераздвојне. Ово су те особине:

I. ПРОСТОРНОСТ

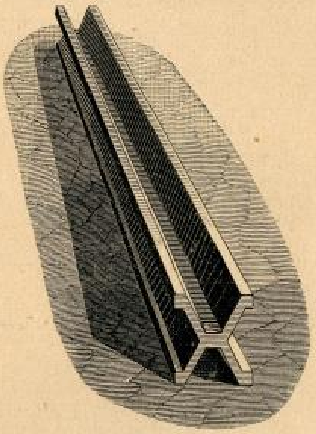
25. Сва материја, која се у природи, налази заузима неки извесан простор. Простор се сам по себи пружа у бескрајно много праваца. Но ма како били многобројни правци простора, ипак се сви они могу свести на три главна правца, који један на другоме стоје управно, и то на *дужину, ширину* и *висину.* Висина се у извесном случају зове *дубина* а у другом *дебљина.* Ти се правци зову *димензије.*

Простор је по себи неизмеран, бескрајно велики, међу тим се поједини делови простора могу међу собом сравњивати и то се сравњивање зове *мерење.* Све се мерење простора своди на мерење дужина (линија) и на мерење праваца (углова). За мерење дужина служе дужинске, (линијске) мере а за мерење праваца служе угловне мере.

26. **Дужинске мере.** — Дужинске су мере разне код разних народа још и данас. Одавна се осећала потреба да се свуда заведу исте дужинске мере, па су зато многи научњаци у разно доба предлагали ове или оне дужине за основицу дужинских мера. Тако је *Хигенс* (Huygens) предложио 1672, дужину секундног клатна; *Вајдлер* (Weidler) је предложио 1727. одстојање обе зенице код одраслог човека; *Андрија Бем* (Andreas Böhm) 1771, простор који тело пређе слободно падајући за једну секунду; *Џон Хершел* (John Herschel) предлагао је један десетмилионити део поларне земљине осе. Још је 1670 године предложио астроном *Габријел Мутон* (Gabriel Mouton) из Лијона дужину меридијанског лука од једне минуте, узевши да земља има кугласт облик, за јединицу дужине и дао јој име *милијара*. Године 1790. француска влада именује једну комисију, да одреди јединицу дужинских мера и та комисија усвоји један десетмилионити део квадранта оног земљиног меридијана, који пролази кроз Париз и да му име *метар*. По извршеном мерењу дефинитивна и права дужина метра би утврђена 10 децембра 1799 год. п. н. У исто доба усвоје у Енглеској за јединицу дужинских мера дужину секундног клатна у Лондону на морској површини и на $13\frac{1}{3}{}^{\circ}$ R. и даду јој име *јард* (yard).

Француски метарски систем би усвојен у Италији 1805 год.; у Холандији 1819; у Белгији и Грчкој 1836; у Шпанији 1859; у Немачкој 1882 а у Аустрији 1876. Код нас је усвојен законом од 1 Децембра 1873 а важи обавезно од 1 Јануара 1880 год. Само Енглеска није званично усвојила метарски систем, премда се енглески научари врло често њиме служе у својим делима. У априлу и мају 1875 године држана је у Паризу тако звана метарска конференција, ради договора како да се о заједничком трошку подигне један међународни биро за мере и тежине. Од већих европских држава тој конференцији није присуствовала само Енглеска. По закључцима те конференције, за сваку се државу имају израдити основне мере од легуре из платине и иридијума у размери као 9 према 1, јер је та легура и тврђа и постојанија од чисте платине.

27. *Првобитни метар*, који је израдила француска метарска комисија последње године прошлога века направљен је од чисте платине, чува се у државној архиви у Паризу и зове се *законити метар* јер је њега утврдио закон француске скупштине. То је платинска шипка, која с једног краја на други има управо један метар на температури нули. Према њему, израђен је тако звани *међународни основни метар* или „*праметар*“ од платин-иридијума, који се разликује од првобитног метра у томе што је дужина метра означена двема цртама од којих је свака од прилике за један сантиметар удаљена од самога краја. Са таквог се метра могу лакше копирати други метри но кад би сама шипка била дугачка с краја на крај један метар. Најзад да би се избегла свака деформација тога метра, дат му је такав



Сл. 2.

геометријски облик, који се на основу извесних испитивања најтеже даје повити (сл. 2.). Црте које одређују дужину метра повучене су у равни која пролази кроз тежиште целога тела.

Све копије скинуте са међународног основног метра у свему су сличне са њим и изливене такође од иридиране платине.[1]

Тих метарских копија израђено је до 1889 године свега 30 и раздате су појединим државама да служе као народне прамере. Ни један народни праметар не одступа од међународног за $\frac{1}{100}$ милиметра а само одступање одређено је до на $\frac{1}{5000}$ део милиметра тачно.

28. За разне практичке примене, изведене су веће и мање дужинске мере од метра. Ево тих мера:

Мере мање од метра:

1 м. = 1 метар = 10 десиметара = 100 сантиметара = 1000 милиметара

1 дм = 1 десиметар = 10 сантиметара = 100 милиметара

1 см = 1 » = 10 »

1 мм = 1 »

Мере веће од метра:

1 Мм = 1 миријаметар = 10 километара = 100 хектометара = 1000 декаметара = 10000 метара

1 Км = 1 километар = 10 хектометара = 100 декаметара = 1000 метара

1 Хм = 1 хектометар = 10 декаметара = 100 метара

1 Дм = 1 » = 10 »

29. Пошто се врло често наилази у научним, нарочито старијим делима и на друге мере, то је потребно да бар главније од њих споменемо заједно са њиховим односима према метарским мерама. Ово су те мере.

Париска стопа	0·3248394^m
Рајнска стопа	0·3138535
Баварска стопа	0·2918592
Швајцарска стопа	0·3000000
Шведска стопа	0·3014943
Енглеска и руска стопа	0·3047945
Бечка стопа[2]	0·3161109

[1] По најновијим одредбама спљоштености земљине излази да је четвртина меридијанске елипсе дугачка не 10,000.000 већ по Clarke-у 10,001.877 м. а по Faye-у 10.002.008 м. Међу тим ма каква била тачност са којом је први метар одређен, ипак је за практику дужина једног метра стална величина, пошто је скинута са непромењивог законитог метра, који се чува у париској архиви.

[2] И код нас употребљена.

Немачка или географска миља (15 = 1°)	7·420438^{km}
Прајска миља (24000 ст.)	7·532485
Аустријска миља (24000 ст.)	7·586663
Швајцарски сахат (16000 ст.)	4·800000
Енглеска миља (5280 ст.)	1·609315
Руска врста (3500 ст.)	1·066781
Морска миља (60 = 1°)	1·855109
Париска линија	2.2558^{mm}
Тоаза (6 ст.)	1·9490364
Јард (3 енгл. ст.)	0·9143835

30. За мерење дужина служе нам разни апарати било такви, који се поред или на оне дужине, које се мере непосредно намештају, било такви, којима се те дужине са веће или мање даљине премеравају посматрањем кроз дурбине.

Најбољи материјал за тачна мерила је без сумње иридирана или чиста платина а ако је потребно да мерило буде прозрачно онда горски кристали; сав остали материјал као дрво, челик или други какав метал, стакло, хартија и т. д. изложен је разним променама у след којих се или троши или се неправилно на топлоти шири или упија влагу или се савија и т. д. Мерила направљена од таквог материјала могу служити само за мерења обичне тачности.

31. Дужинским се мерама мере и површине с том само напоменом да се дужина у два (једно на друго управна) правца мери. Мера за површину се онда добија производом из обе дужинске мере; јединица за површине јесте квадратни метар од кога су као и код чисто дужинских мера изведене и мање и веће површинске мере:

кв. мм	= квадратни	милиметар	= 0·000001 кв. м.
кв. см.	= »	сантиметар	= 0·0001 » »
кв. дм.	= »	десиметар	= 0·01 » »
кв. м.	= »	метар	= 1 » »
а	= »	декаметар	= 1 ар = 100 кв. м.
ха	= »	хектометар	= 1 хектар = 10000 кв. м.
кв. км.	= »	километар	= 1,000.000 кв. м.

Од старих мера помињемо:

1 енгл. квадр. палац	645·1 кв. мм.
1 енгл. кв. стопа	929 кв. см.

1	руска десетина	1·0925 ха
1	геогр. квадр. миља	55·0588 кв. км.
1	енгл. квадр. миља	2·5899 кв. км.
1	квадр. врста	1·1380 кв. км.
100	аустр. квадр. стопа	9·99207 кв. м.

32. Код извесних површина није потребно мерити оба поменута правца већ само један на пр код правилних квадрата, код равностраног троугла, (само једна страна) код круга (само полупречник) и т. д. па се нарочитим простим обрасцима одређује површина. Ако је површина и ако доравна, ограничена неправилним линијама онда нису довољна два правца већ је мерење површине онда сложенији и у извесним приликама прилично трудан посао. Због тога су конструисани нарочити апарати, *планиметри* као и *интегратори*, који дају одмах површину, кад се извесним њиховим делом иде границама површине која се мери. Има тих апарата и таквих, којима се мере не само равне већ и сферне површине.

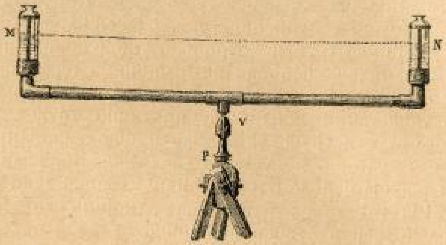
33. На послетку дужинским се мерама одређују и запремине појединих тела. Само онда ваља мерити у три једно на друго управна правца и множењем сва три добијена податка добија се запремина у кубним мерама на пр. кубним метрима од кога су изведене како мање тако и веће кубне мере:

куб. мм.	=	1 куб. милиметар	=	0·000000001 куб. м.
куб. см.	=	1 куб. сантиметар	=	0·000001 » »
куб. дм.	=	1 куб. десиметар	=	0·001 » »

Од осталих кубних мера наводимо:

1	енг. кубни палац	=	16·386 куб. см.
1	хектолитар	=	100 литара
100	аустр. куб. стопа	=	3·15852 куб. мет.
100	енгл. » »	=	2·83153 » »

Има правилних геометријских тела, код којих је потребно измерити само једну или две величине на пр. код коцке, октаедра, тетраедра и т. д. само једну страну, код лопте само полупречник, код цилиндра само висину и полупречник основице и т. д. па одредити нарочитим обрасцем запремину. Међу тим, код тела ограничених многим неправилним површинама непосредно одређивање запремине је врло заметно, па за то се у таквим случајима запремина одређује посредним путевима и нарочитим апаратима. Телима неправилног облика одређује се запремина потапањем у воду; или у какву другу течност у којој се не растварају и коју у себе не упијају. Исто тако извесним се телима одређује запремина на-

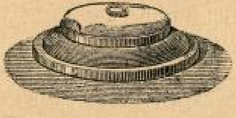


Сл. 3.

рочитим справама које се зову *стереометри* и *волуменометри* и којих има разних облика и метода.

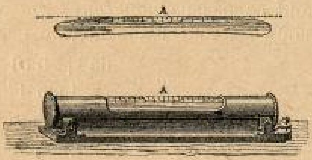
Како о појединим справама тако и о методама за посредно одређивање запремине разних тела биће говора у оним одељцима, у којима се буду изложиле те методе, које су примењене за одредбу запремина појединих тела.

34. **Мере за правац.** — Да би се поједини правци простора могли одредити, потребно је утврдити претходно нарочито два одређена правца и то *хоризонтални* и *вертикални* правац. Хоризонтални или водоравни правац, (који заузима површина мирне воде) одређује се за грубља мерења тако званом *воденом вагом* а то су две усправљене стаклене цеви M и N спојене једном трећом дужом цеви сл. 3. и до некле напуњене водом. Површине воде у обема усправљеним цевима леже у једној хоризонталној линији па и онда кад трећа, спајна цев није хоризонтална. За тачније одредбе хоризонталних праваца служи *либела*



Сл. 4.

и то или лоптаста (сл. 4) или цеваста (сл. 5). Лоптаста се либела због тога тако зове, што је унутрашња страна стакленог поклопца, издубљена лоптаста површина. И у једној и у другој налази се један мали мехур од паре оне течности којом је либела напуњена (алкохолом, петролеумом, етером и т. д.). Ако линија или површина на коју се либела постави није хоризонтална, онда мехур оде на ону страну која је виша. Поправљањем тако нехоризонталног правца, доведе се мехур или на средину цеви или у средину лоптасте површине; кад мехур такав положај заузме, онда значи да је правац или површина на којој се либела налази хоризонтална.



Сл. 5.

35. Цевастом се либелом могу и површине доводити у хоризонталан положај, само онда ваља узети или две разне либеле укрштене под правим углом или само једну такву либелу али коју можемо постављати час у један час опет у други, на онај први положај управан правац. Код већине научних инструмената употребљене су само цеваste либеле. Сама цев, код цеваste либеле јесте мали део једног кружног обима великога полупречника; она се произвољно градуише и затвори у металан цеваст оквир као што се то на слици види. Један крај тога оквира може се једним нарочитим завртњем (десно на слици) подизати и спуштати и тиме сама либела регулисати.

На либели ваља увек читати и један и други крај мехура; тако добијена аритметичка средина даће у исти мах и средину мехура.

36. Код сваке тачне либеле главна је ствар да се види, да ли је издубљена страна цеви, по којој клизи мехур заиста један део круга и да се одреди вредност једне њене поделе. То се обоје постиже једним асталчићем A, (сл. 6.), који се завртњем V, може око осе C подизати и спуштати.

Нека буде a висина ходника завртња, l даљина тога завртња од осе C. Обрнимо завртањ за један пун обрт; асталчић, који је пре тога био хоризонталан нагнуће се за

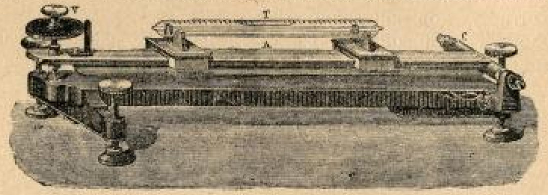
$$\alpha = \frac{a}{l \sin 1''} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (24$$

Обрћући тако завртањ увек за исту величину, гледа се да ли се и мехур помиче увек за исти број подела. Ако то буде, цев је добро савијена, не буде ли, онда се направи таблица међусобних вредности појединих подела.

37. Да се нађе апсолутна вредност једне поделе, обрће се завртањ за n пуних обрта и p стотих делова обрта док се мехур помакне за једну поделу. Угао φ, који се назива *константа либеле* и који нам у секундама даје вредност једне поделе налази се по обрасцу:

$$\varphi = \frac{na + 0{\cdot}01\ ap}{l \sin 1''} \quad \dots\dots \quad (25$$

38. Пре него што ћемо либелу употребити, треба њу саму регулисати, т. ј. треба довести мехур у средину кад подлога на којој либела стоји, буде хоризонтална.



Сл. 6.

То се ради на овај начин. Либела се постави на подлогу која се једним завртњем може подизати и спуштати па се тим завртњем дотера мехур у средину своје цеви. Сад се либела окрене за 180 степени, око вертикалне осе; ако се мехур врати опет у средину, либела је добра. Не буде ли то, него мехур остане помакнут за δ подела од средине, онда се оним завртњем на самој либели, на који смо мало час скренули пажњу, мехур врати за $\frac{\delta}{2}$ подела и то се исто понавља све дотле, док мехур не остане стално у средини, кад либелу на једну или другу страну окренемо.

Осетљивост либеле може бити врло велика. Код астрономских и геодетских справа либеле могу показати и 0·01 једне секунде. С тога ваља са таким справама врло деликатно поступати, а нарочито избегавати загревање либеле па долазило оно од посматрачевога тела или с које друге стране.

39. *Вертикалан* правац, т.ј. правац који је увек управан на хоризориталном правцу одређује се *виском*; то је опет један витак конац о који слободно виси такав терет, који може конац добро да затегне. (Сл. 7). Међу оваким справама које вертикалан правац показују да споменемо тако зване *сонде* или *батометре*, а то су справе којима се одређује вертикална дубина мора на неком извесном месту. Те су справе или обичан висак направљен од какве тешке металне лопте обешене о јачи конопац или ланац па се дотле спушта у море док лопта не удари у дно морско; (више пута се тај тренутак кад лопта удари у дно, дознаје на површини нарочитим електричним сигналом) или су оне основане на другим појавама о којима за сад не може бити говора.

Сл. 7.

Угао који заклапа хоризонталан са вертикалним правцем зове се прав угао и подељен је на 90 степени, сваки степен на 60 минута а сваки минут на 60 секунди. Цео обим једнога круга има четири такваправа угла или 360°. Често је покушавано да се и код угловних мера уведе децималан систем али није до сад усвојен.

ТАЧНО МЕРЕЊЕ ДУЖИНА И ПРАВАЦА.

40. Непосредно мерење како дужина тако и праваца или углова, мерилима, може се извршити само до неке извесне тачности. Ако меримо какву дужину мерилом које је подељено на милиметре, наћићемо на пример да у датој дужини има извесан цео број милиметара и још један остатак који је мањи од милиметра. Довољно извежбан посматрач, могао би оком *оценити* тај остатак

до на један десети део милиметра тачно, али његова оцена не може бити тачнија. Па како извесна мерења у научним испитивањима захтевају што је могуће већу тачност, то су за тај циљ конструисане нарочите справе, које се општим именом називају *справе за тачно мерење*.

41. Пошто за сада говоримо само о мерењу простора у опште, то ћемо се овом приликом задржати само код справа за тачно мерење дужинских или линијских величина (дужине, ширине, висине, дебљине, дубине) као и код справа за тачно мерење праваца или углова. Ево главнијих тих справа:

1. *Обичан, тачно подељен метар* и *кружни лук*.
2. *Нонијус* или *верније* прави и лучни.
3. *Калибарско мерило*.
4. *Компаратор*.
5. *Катетометар*.
6. *Теодолит*.
7. *Микрометарски завртањ или микрометар*.
8. *Сферометар*.
9. *Деобна машина*.
10. *Кончани или окуларни микрометар*
11. *Микрометарски катетометар*.
12. *Оптичка полуга*.

Међу свима тим справама *три* су основне справе а остале су из њих изведене или управо на њима основане. Те три основне справе за тачно мерење јесу:

Нонијус или верније
Микрометарски завртањ
Оптичка полуга.

Ми ћемо како ове основне тако и главније из њих изведене справе за тачно мерење у кратко прегледати.

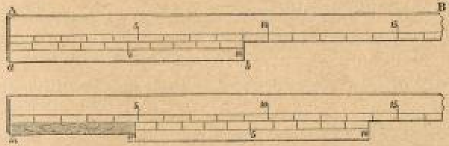
А. Нонијус или верније.

42. Прво име те справе долази од имена једног Португалца, Петра Нунеца или Нонијуса (Pedro Nunez, Petrus Nonius) професора геометрије у Коимбри (рођ. 1492 а умро 1577). Он је делећи више концентричних квадраната на 90, 89, 88, 87 и т. д. степена показао начин, како се упоређивањем тих подела могу тачно одредити и мањи делови од једнога степена. Друго име поменуте справе долази од имена једнога Белгијанца, Петра Вер-

није-а (Pierre Vernier, рођен 1580 а умро 1637), који је 1631 год. публиковао садањи облик те справе, и која треба да носи ово друго име, али која се ипак због згоднијег изговарања назива првим именом. Немачки писци често називају ту справу „вернер"-ом.

Нонијусом се могу одредити делови мањи но што су најмање извршене поделе било на каквој дужинској било на лучној мери. И према томе, да ли се нонијусом одређују дужинске или угловне мере, и он се назива *прави* (линијски) или *криви*, *лучни* (кружни) *нонијус*.

43. **Прави или линијски нонијус.** — Именом нонијус назива се један додатак ab (сл. 8.) свакоме тачнијем главном



Сл. 8

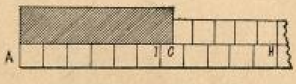
мерилу, који се додатак уз то главно мерило може помицати и довести на разна места поред њега. Најмањи делић који се нонијусом може мерити, зависи од његове конструкције. Ако се у опште хоће да измери $\frac{1}{n}$ део најмање поделе главног мерила, (на пр. $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$ и т. д. део једног милиметра, ако је главно мерило подељено на милиметре), онда се на нонијусу обележи дужина од $n-1$ дела (9, 99 и т. д. милиметара) и та се дужина подели на пуних n једнаких делова (дакле на 10, 100 и т. д. једнаких делова); тако ће свака подела на нонијусу бити *мања* за $\frac{1}{n}$ део најмање поделе главног мерила (т. ј. за $\frac{1}{10}$ или $\frac{1}{100}$ и т. д. део једног м. м.). Поједини се делови на нонијусу обележе цифрама од 0 до n и то у *истом* смислу којим иду и цифре на главном мерилу. Ако је нонијус подељен на 10 делова зове се *десетичан*, ако је на 100, *стотичан* и т. д.

44. Кад се нонијусом мери, на пр. предмет *mn*, и нонијус помакнут додирује својим нултим крајем тај предмет, онда ће се увек ма која подела нонијусова μ сложити са ма којом поделом на главном мерилу, (на слици се слаже осма подела нонијусова). Ако смо непосредно нашли x целих подела главнога мерила, (на пр. x целих милиметара) и пошто нам нонијус даје n-те делове њихове, то ће цела дужина измереног предмета бити

$$= x + \frac{\mu}{n} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (26$$

На слици је $x = 4$, $\mu = 8$, $n = 10$, те с тога је цела измерена дужина $= 4 \cdot 8$.

У осталом значај нонијуса може се и на овај начин увидити. Мерећи неку дужину, ми смо на пример дошли до C, (сл. 9.) тако да нам ваља поред целога броја подела $x = AI$, одредити још остатак IC. Из слике имамо



Сл. 9

$$IC = IH - CH$$

ако се рецимо подела нонијусова H слаже са поделом главнога мерила. Пошто $IH = \mu$ делова мерила (на пр. μ милиметара) а $CH = \mu$ делова нонијуса $=$

$$= \mu \left(\frac{n-1}{n}\right) \text{м.м. то је онда}$$

$$AC = AI + IC = x + IC$$

$$= x + \mu - \mu \left(\frac{n-1}{n}\right)$$

$$= x + \mu \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) = x + \frac{\mu}{n} \text{ м. м.}$$

45. Може се десити да се ни једна подела нонијусова не слаже тачно ни са једном поделом главнога мерила. У том случају налази се, да се две поделе нонијусове скоро једнако тачно слажу са двема поделама

главнога мерила. Ако су те две поделе μ и ν и ако је нонијус подељен на n делова онда је тражени остатак

$$=\frac{\mu+\nu}{2n} \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (27$$

Рецимо да је $n = 50$, т. ј. да је 49 милиметара подељено на 50 једнаких делова и ми смо при читању нашли да се 37-ма и 38-ма подела нонијусова скоро једнако слажу са извесним поделама главнога мерила. Онда је дужина траженога остатка

$$=\frac{37+38}{100}=0{\cdot}75.\ \text{м.м.}$$

Из овога се у исти мах види, да несигурност у читању између две поделе на нонијусу може да буде $=\frac{1}{2n}$ти део, те према томе да се извесним нонијусом могу разне дужине одређивати до на $\frac{1}{2n}$ти део тачно.

46. Често се може наћи справа, код којих цифре на нонијусу иду супротно цифрама на главном мерилу. И ако смо на тако изврнутом нонијусу нашли да се μ-та његова подела слаже са ма којом поделом на главном мерилу а нонијус је подељен на n делова онда је тражени остатак

$$=\frac{n-\mu}{n} \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (28$$

Дакле ако је нађено да се слаже трећа подела нонијусова, а нонијус је подељен на 10 делова, онда остатак износи 0·7.

47. Енглески механичари праве нонијус узевши $n+1$ део најмање поделе главног мерила (место $n - 1$ дела) и делећи га опет на n једнаких делова. То ће рећи да они узимљу на пример дужину од 11 м.м. (место 9 м.м.) и деле је на 10 једнаких делова. Пошто они у исти мах такав нонијус обележавају цифрама у изврнутом смислу, то је и читање таквог нонијуса истоветно са прво описаним нонијусом. Дакле ако се 7-ма подела тог енглеског нонијуса (наравно рачунато од његове нуле) слаже

са ма којом поделом главнога мерила, то је тражени остатак 0·7 (ако је нонијус подељен на 10 делова).

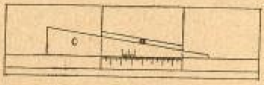
48. Нонијус ваља увек, с времена на време контролисати. Тога ради, треба довести нулту тачку нонијусову у продужењу ма које поделе на мерилу; крајња се подела нонијусова мора сложити (ако је тачан) са n—1-вом поделом мерила. Узгред напомињемо да се тако контролише и само мерило; јер ма која се подела мерила сложила са нулом нонијуса, десета подела овога мора се сложити са ма којом поделом мерила и ако то буде на једном месту то мора да буде, ако је мерило свуда тачно и на свима осталим местима.

49. **Калибарско или дебљинско мерило.** — Нонијус је непосредно примењен на одредбу дебљине или калибра разних мањих предмета. Такво једно калибарско мерило представљено је на сл. 10. Предмет, кога се дебљина

Сл. 10.

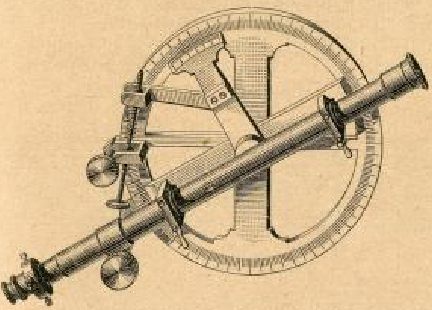
хоће да одреди, унесе се између два кљуна те справе, од којих је један покретан и носи на једном свом делу нонијус. Само је мерило подељено на милиметре и нонијус обично даје дебљине разних тела у десетим деловима милиметра.

Сличну примену нашао је нонијус и код клинастог калибарског мерила као на сл. 11 којим се махом одђују дебљине жица. Овде је десетичан милиметарски нонијус спојен са једним клином, кога је хипотенуза 10 пута дужа од краће катете. На тај се начин могу непосредно одредити дебљине жица до на 0·01 део милиметра, али под условом да се на клин увек једнако притискује.



Сл. 11.

50. **Лучни или кружни нонијус.** — Као што је већ споменуто, нонијус је најпре био употребљен за одређивање ситнијих делова лучних степена. Главно мерило линијског нонијуса замењено је овде једним подељеним кругом, поред кога клизи лучни нонијус окрећући се око осе, око које се окреће и подељени круг. (сл. 12.).



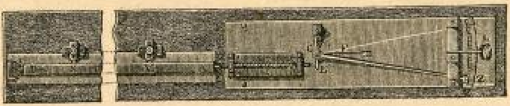
Сл. 12.

И овде се на нонијусу одвоји n—1 део најмање поделе круга и подели на n једнаких делова; нонијусом ће се читати онда $\frac{1}{n}$ ти део најмање кружне поделе. На пример круг је подељен на полустепене; на нонијусу се забележи дужина од 29 полустепена и подели на 30 једнаких делова. Очевидно је, да такав нонијус даје $\frac{1}{30}$ део полустепена, т. ј. минуту и то са тачношћу од пола минуте као што смо то напред објаснили.

Код тачних кругова, обично су степени подељени на 12 делова од по 5'. На нонијус се пренесе 59 таких делова од по 5', т. ј. лук од 5°—5' и подели на 60 једнаких делова. Према томе дужина сваког дела нонијусовог износи 5'—5" што значи да се таким нонијусом може непосредно читати лук од 5". Већа се тачност од ове, лучним нонијусом тешко може постићи.

Код иоле тачних кружних справа има обично два нонијуса на два краја једнога пречника. Читањем таква два нонијуса исправља се погрешка у центрирању тога пречника и самога подељеног круга. Још тачније справе носе четири нонијуса удаљена међу собом обично за 90°.

51. **Компаратор.** — То је справа којом се упоређују два мерила међу собом, на пример какав метар са нормалним или праметром. Код компаратора је спојен кружни нонијус са једном разнокраком полугом на лакат и може се употребити за упоређивање и оних мера које иду с краја на крај као и оних којих је дужина цртама обележена. На сл. 13 представљен је компаратор за мерила која иду с краја на крај.



Сл. 13.

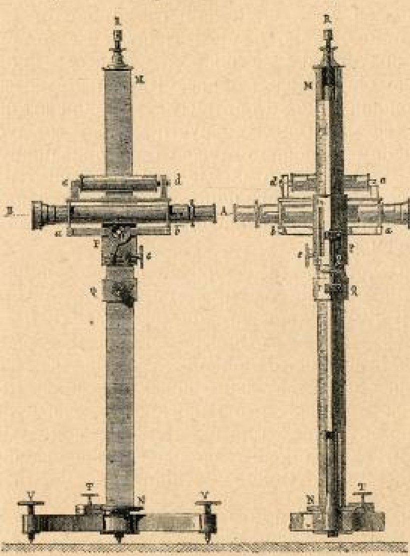
Кад се таквом справом хоће рецимо један метар да упореди, онда се на њу мете нормални метар AB тако да својим једним крајем допре до непокретне чивије C, а другим до покретне шипке D, која даље упире у краћи крак полуге на лакат E. Дужи крак полуге Gz показаће на подељеном луку неку извесну поделу коју ваља прочитати и забележити.

Сад се са справе дигне нормални метар па се место њега мете онај метар, који се са нормалним упоређује. Ако казаљка и овом приликом покаже исту поделу, онда значи да су оба метра са свим исте дужине. На против, ако казаљка покаже другу какву поделу, онда значи да је овај други метар дужи или краћи од првога и та се разлика може са великом тачношћу и одредити.

Јер ако је дужи крак полуге 100 пута дужи од оног краћег, и ако је нонијус десетичан а лук на милиметре подељен, онда се разлика у дужинама она два мерила одређује до на $\frac{1}{1000}$ м. м. т. ј. до на један микрон.

Компаратори за упоређивање мерила којих је дужина обележена цртама, спојени су са микрометрима, о којима ћемо мало доцније говорити. Таким се справама може врло лако одредити један микрон (μ) а са већом пажњом достиже се и до $\frac{1}{20}$ дела једнога микрона.

52. **Катетометар.** — Најпотпунију примену нашао је нонијус код катетометра, справе којом се мери вертикална раздаљина две или више тачака. (*κάθετος* вертикала и *μέτρον* мера). У главноме на катетометру има један или два дурбина којих је оптичка оса хоризонтална и који се могу око вертикалне осе окретати на разне



Сл. 14.

стране, тако да се њима могу догледати разне тачке исте хоризонталне равни. Ти се дурбини могу још, дуж једног вертикалног стуба, који је на милиметре подељен, подизати и спуштати; њима се дакле могу две или више тачака, које су на разним вертикалним остојањима догледати, и читањем појединих подела на стубу (уз припомоћ нонијуса) одредити раздаљина оних хоризонталних равни у којима угледане тачке леже.

53. Опис. — Вертикални стуб, по коме се дурбин катетометра клизањем подиже и спушта и који је на милиметре подељен може бити цилиндричан или тространо или четворострано призматичан. (сл. 14). Али ма какав био његов спољашњи облик, тај је стуб шупаљ и натакнут на једну челичну јаку шипку, вертикално утврђену у масиван троножац. Кроз горњи крај шупљега стуба пролази завртањ R, који својим врхом допире до челичне шипке; тако је цео тај шупљи стуб врхом тога завртња подупрт и у његовом се лежишту а око челичне шипке као око осовине обрће. Нарочитим се завртњем T на троношцу, може обртање стуба спречити.

Кад се завртањ F отпусти, може се дурбин са целим својим прибором довести на приближну висину оне тачке коју хоћемо да гледамо, и ту се дурбин тим истим завртњем укочи. Фина померања дурбина, којим се он доводи тачно на висину посматране тачке врше се завртњем *g*.

Поред тог кретања дурбина на више и на ниже а дуж вертикалног стуба, може се дурбин још нагибати завртњем *e* око хоризонталне осовине *O*, и тако довести увек у хоризонталан положај, што се у осталом познаје по либели *cd* која је за дурбин везана. Кроз прозор *mn* на рукавцу који носи дурбин, види се милиметарска подела вертикалнога стуба и на тој се подели а помоћу нарочитог нонијуса извученог на самоме прорезу рукавца, прочита на познати нам начин висина посматране тачке. Обично је нонијус педесетичан, т. ј. обично се катетометром непосредно одређује $\frac{1}{50}$ део милиметра.

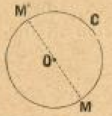
54. *Удешавање, регулисање катетометра.* — Пошто је катетометар основна справа за тачно одређивање линијских величина, ми ћемо се мало дуже око његове употребе задржати. То чинимо у толико пре, што се многе операције, које на катетометру изведемо, дају применити и на многе друге научне справе.

Код сваког катетометра, ако хоћемо да нам да тачне резултате, мора бити обртна оса са свим вертикална а оптичка оса његовог дурбина савршено управна на ту обртну осу т. ј. хоризонтална. Да то буде, ваља да се испуне ови услови:

55. — 1). *Треба да падну, оптичка и геометријска оса дурбина заједно.*

Тога ради се кроз дурбин посматра на каквом вертикалном заклону (ако је геометријска оса дурбина приближно хоризонтална) једна тачка M. Пошто се у пољу дурбина налази укрштена кончаница (о којој ћемо мало доцније опширније говорити), то треба посматрана тачка M да падне у пресечну тачку конаца; сада се та тачка M налази у оптичкој оси дурбина. Како је дурбин у свом виљушкастом лежишту покретан, то се он стане обртати у том лежишту а око оптичке, односно геометријске осе. Ако за све време обртања, посматрана тачка M остане у пресечној тачки кончанице, оптичка и геометријска оса дурбина поклапају се.

Али ако те две карактеристичне осе дурбина не падају у исти правац, онда при обртању дурбина, тачка M не остаје на свом првобитном месту, већ у пољу дурбина описује једну кружну линију *C* (сл. 15) око тачке *O* као око средишта, а кроз коју тачку пролази геометријска оса дурбина.



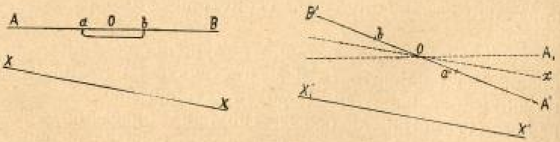
Сл. 15.

Да се дакле та нетачност дурбина исправи, ваља посматрати извесну тачку *M* на поменутом заклону па обрнути дурбин око његове геометријске осе за 180°; на пресечној тачки конаца угледаће се сад тачка *M'*; по себи се разуме да су тачке *M* и *M'* две крајње тачке једнога пречника круга *C*. Кад се на заклону одреди половна тачка праве *MM'*, онда се у исти мах налази тачка *O*, т. ј. средиште круга *C* дакле тачка у којој геометријска оса дурбина, пробија заклон. Сад се, не дирајући дурбин, нарочитим завртњем помери кончаница у дурбину тако, да њена пресечна тачка падне на посматрану тачку *O*; тиме се у исти мах оптичка и геометријска оса дурбина доведу у један правац. По себи се разуме да то треба оверити даљим обртањем дурбина као и у почетку.

56. — 2. *Треба са геометријско-оптичком осом дурбина упаралелити нулту линију либеле.*

Под нултом линијом либеле разуме се она линија, која у уздужној равни симетрије (у којој је и оса либеле) пролази кроз обе нулте тачке либеле, т. ј. кроз обе крајње тачке мехура кад је либела хоризонтална. И између геометријско-оптичке осе дурбина и нулте линије либеле (која је с дурбином спојена) мора да влада потпуна паралелност. Та се паралелност извршује и оверава на ова начин. Завртњима *V* либелин се мехур доведе у средину, т. ј. између обе нуле; ако је геометр. оса паралелна са нултом линијом, онда је она хоризонтална. Сад се дурбин са либелом извади из свог виљушкастог лежишта, окрене се за 180° (око вертикалне осе) и поново се намести између виљушака. Геометријска оса дурбина заузеће после овог обртања исти положај и, ако је оса дурбина паралелна са нултом линијом либеле, и мехур ће заузети исти положај као и мало час, т. ј. зауставиће се у средини. Ако пак паралелност не постоји, мехур се више не враћа у средину.

Нека у првом положају дурбина и либеле, права xx_1 представља осу дурбина а права AB нулту линију или краће, осу либеле (сл. 16). Кад се дурбин са либелом



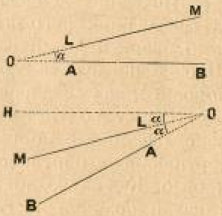
Сл. 16

окрене, оса дурбина задржаће свој стари положај у x', x' а оса либеле заузеће нагнут положај A' B'. Угао $A' O A_1$ који у овом другом положају заклапа оса либеле са хоризонталом два пут је већи од угла $A_1 O x$ који није ништа друго до угао који је заклапала оса дурбина са осом либеле у првом положају. Да би се дакле непаралелност исправила, нарочитим завртњем, који је на самој либели, либела се враћа у хоризонталан положај, т. ј. мехур се либеле из скренутог свог положаја доводи према средини либеле али не са свим већ само до половине. (Свака је либела тако утврђена за дурбин, да јој се један крај нарочитим завртњем може подизати и спуштати око осе која је на другом њеном крају. — 35). Сад је и нулта линија либеле и оса дурбина хоризонтална те дакле оне су међу собом паралелне.

57. — 3. *Треба да је геомтр.-оптичка оса дурбина управна на обртну осу катетометра.*

Тога ради, обрћући ма који завртањ на троношцу катетометра, доведимо мехур на либели у средину. Кад стуб катетометра заједно са дурбином окренемо за 180°, ма какав био положај осе катетометра, нулта линија либеле заузеће првобитни свој положај ако буде управна на осу катетометра; другим речима та ће линија бити опет хоризонтална као и у првом положају и мехур ће се зауставити у средини.

Рецимо да то не буде, и да геом. опт. оса дурбина па дакле и нулта линија либеле AB заклапа са LM, управном на осу катетометра, неки угао α (сл. 17.). У том је случају, нулта линија либеле хоризонтилна, а линија LM заклапа угао α са хоризонталом (и то тако да јој крај M лежи више од L); кад се катетометар окрене за 180°, линија LM (управна на осу катетометра) заузима нов положај али паралелан са првим положајем т. ј. заклапа понова угао α са хоризонталом OH; само сада крај L лежи више.



Сл. 17

Према томе нулта линија или оса либеле AB, која непрестано заклапа угао α са правцем OLM није више хоризонтална и заклапа са хоризонталом OH, угао 2α. С тога ће се мехур либелин помаћи према крају A за извесан број подела n, који одговара углу 2α. Да се дакле то поправи, окрене се завртањ e а с њим и дурбин са либелом толико да се мехур врати за $\frac{n}{2}$ подела према средини; тиме се за α смањи угао који заклапа оса либеле за хоризонталом и са LM управном на осу катетометра. Другим речима, оса либеле је сад паралелна са LM па дакле управна на осу обртања катетометра.

58. — 4). *Треба да буде обртна оса катетометра вертикална.*

Вертикалност обртне осе катетометра постиже се на овај начин: Стуб катетометра, заједно са дурбином на њему, окрене се тако да оса дурбина буде приближно паралелна са правцем ма која два завртња на троношцу. Сад се један од та два завртња окреће на једну или другу страну, док мехур либеле на дурбину не дође у средину. За тим се стуб катетометра, заједно са дурбином окрене за 90^{0} према том првом положају. Обрћући трећи завртањ на троношцу (који се сада налази у правцу осе дурбина), док мехур либеле не дође у средину, ми ћемо довести осу катетометра у вертикалан положај, јер је оса дурбина доведена у два једно на друго управна положаја хоризонтално, па пошто смо већ раније ту осу довели да буде перпендикуларна на осу катетометра, то значи да је обртна оса катетометра вертикална.

Прва три удешавања катетометра врше се један пут за свагда; пре него што се почнемо служити њиме, ваља само оверити да ли се што случајно није пореметило. Што се последњег удешавања тиче, оно се мора увек поновити, кад се справа с једног места на друго преноси.

Кад су код катетометра на самом троношцу утврђене две либеле којих осе заклапају прав угао, онда се вертикалност обртне осе катетометра постиже врло лако и брзо. Кад се један пут оса катетометра доведе у вертикалан положај на горе описан начин, т. ј. помоћу либеле на дурбину, (коју треба попети што је могуће више), онда се, не дирајући завртње који носе катетометар, удесе обе либеле на троношцу (својим завртњима) тако, да им мехури дођу у средину. Кад се то сврши, онда су осе обадве те либеле хоризонталне и у исти мах управне на обртну осу катетометра. То ће рећи, да кад се помоћу завртања на троношцу доведу мехури обе доње либеле у средину, (кад буду поремећене) да је онда обртна оса катетометра вертикална.

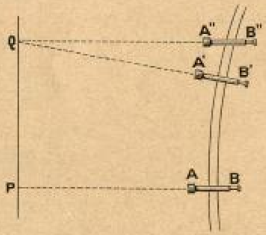
59. — 5. *Треба одредити органске мăне или погрешке катетометра.*

Горе поменуте неисправности катетометра могли смо избећи нарочитим удешавањем и регулисањем. Али има погрешака, које готово свака справа са собом носи и које се не даду избећи; то су тако зване органске или систематске погрешке справе и њих треба познати и одредити. Ево две три главније такве погрешке:

60. — a. *Погрешна деоба.* — Никад се не може јамчити да је подела једнога катетометра па и других справа за мерење, по целој дужини тачна. С тога се свака таква подела мора претходно испитати и оверити; то бива на овај начин:

Узме се једна извесна дужина, па се она мери разним деловима катетометарског мерила. Ако је то мерило по целој дужини својој тачно, онда ће се за поменуту дужину на свима местима наћи иста вредност. Не буде ли тако, разни ће делови катетометарског мерила показати разну вредност оне исте дужине. И помоћу тих неједнакости, ваља конструисати нарочиту криву линију, помоћу које се, разни делови мерила међу собом упоређују и на једну заједничку меру доводе.

b. *Катетометарски стуб није прав.* — Кад би катетометарски стуб, по коме клизи дурбин, био са свим прав, онда би мехур либеле на дурбину остао увек у средини, кад се дурбин премести с једног краја стуба на други. Врло често пак то није случај; онда оптичка оса, коју смо ми довели да буде управна на осу стуба, не остаје на свима местима стуба хоризонтална, и као што сл. 13 показује, растојање две тачке P и Q није више равно оном растојању које се прочита на мерилу. Погрешка је у толико већа у колико су тачке које посматрамо даље од справе.

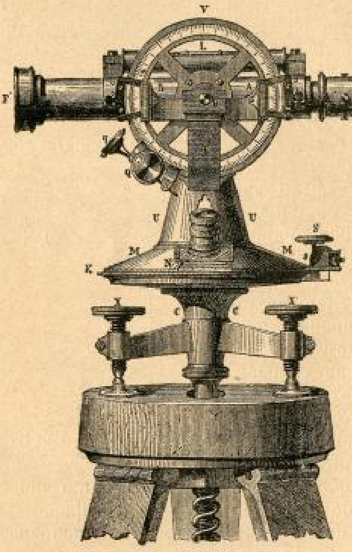


Сл. 18.

У неколико се тај недостатак исправља на овај начин. Кад је дурбин од прилике на таквој висини да нишани на тачку Q а мехур либеле није више у средини као што је био на доњем положају, онда се завртњем e у неколико поремети управност оптичке осе дурбина и обртне осе катетометра, и мехур се доведе у средину, т. ј. оса се дурбина врати у хоризонталан положај. По себи се разуме да због тога морамо преместити дурбин из $A'B'$ у $A''B''$. Дужина P Q је сада само приближно одређена дужином искривљеног мерила од A B до A" B".

c. Слична погрешка може да наступи и онда кад је челична шипка на дакле и оса катетометра права али мерило није са том осом паралелно него према њој више или мање нагнуто.

Та се погрешка мање осећа код тачака које су приближно у истој висини али у разним азимутима, или



Сл. 19.

које су на разним висинама али су приближно у истом азимуту. Ако су две тачке и на разним висинама и у разним азимутима, онда се узме у помоћ једна трећа тачка, која лежи у истој висини са једном а у истом азимуту са другом тачком.

Исто тако могу штетно утицати на катетометарска мерења и *потреси*, којима је катетометар много чешће изложен него што се то обично мисли.

61. **Теодолит.** — Поред катетометра као справе за дужинске мере, ваља споменути теодолит који служи да се тачно измере углови у хоризонталној и вертикалној равни. Главни саставни део теодолита јесте један тачно израђен дурбин. *F*, *F′*, (сл. 19), који се може обртати око хоризонталне осе *D*, за мерење висинских углова обележених на вертикалном кругу V, а тако исто и око вертикалне осе , за мерење хоризонталних или азимутских углова обележених по хоризонталном кругу *k*. Тај је круг заклоњен поклопцем *M M* од спољашњих утицаја (прашине и т. д.) и подела се његова види само на једном делу код N. Како вертикалном тако и хоризонталном подељеном кругу додат је по један или по два наспрамно положена нонијуса за тачно мерење углова А, В. Поделе се на вертикалном кругу (наше слике) читају непосредно оком а на хоризонталном лупом.

62. *Удешавање, регулисање теодолита.* — Као код катетометра, тако исто и код теодолита морају се испунити извесни услови па да мерење њиме извршено буде што је могуће тачније. Ово су ти услови сасвим у кратко изложени, пошто опширније излагање тога предмета спада у геодезију.

1. Обртна (вертикална) оса хоризонталног круга, мора бити савршено вертикална.

2. Обртна (хоризонтална) оса вертикалног круга мора да буде савршено хоризонтална.

3. Оптичка оса дурбина мора бити управна на мало час споменутој хоризонталној оси.

По себи се разуме да деоба оба круга мора бити тачно изведена, а да би се избегла ексцентрична погрешка њихова (ако осе не би пролазиле кроз средишта тих кругова), ваља узети на сваком по два нонијуса удаљена један од другог за 180°.

1. Савршена вертикалност вертикалне осе познаје се по томе, што се мехур либеле, која се на справи налази (или се на њу намести) не премешта из средине док се хоризонтални круг око те осе окреће. Ако се тај услов не испуни, што значи да оса није вертикална, онда се она на исти начин доводи у тај положај као и код катетометра.

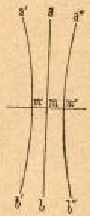
2. Дурбин се окреће око исте хоризонталне осе, око које се окреће и вертикални круг, и ако је та оса заиста хоризонтална, онда оптичка оса дурбина описује једну вертикалну раван. Тога ради ако негде пред теодолитским дурбином обесимо један висак ab (сл. 20) који ће наравно заузети вертикалан положај, па дурбином сматрамо затегнути конац виска у разним висинама, онда ако се конац види непрестано на истом месту кончанице значи да је оса око које се дурбин окреће хоризонтална. Ако се при подизању и спуштању дурбина, конац не види увек на истом месту у видном пољу, него час лево а час десно као што то показује на пр. коса линија $a'b'$, то значи, да оса око које се дурбин окреће није хоризонтална.

Сл. 20.

На други начин испитује се хоризонталност те осе помоћу либеле, која се на ту осу намести и према положају мехура поправља. Нехоризонталност те осе може доћи или услед неједнаке дебљине оних крајева осе који се у лежиштима окрећу или у след неједнаке висине самих лежишта.

3. Кад оптичка оса дурбина није управна на хоризонталној оси око које се дурбин окреће, онда кад се дурбин око те осе подиже и спушта, средишна тачка кончанице не описује праву ab већ искривљену линију $a'b'$ (сл. 21) која се у толико више одваја од вертикалне линије у колико се дурбин више подиже или спушта. Та се погрешка назива *колимациона* погрешка.

Кад се хоризонтални круг (око вертикалне осе) окрене за 180°, па се у том положају опет кроз дурбин посматра, онда ће средишна тачка кончанице описивати линију $a''b''$. Половина растојања $m'm''$ показује колимациону погрешку дурбина, која се тиме поправља, што се кончаница, у дурбину нарочитим завртњем помакне у хоризонталном правцу толико, да њена средишна тачка преполови растојање $m'm''$ т. ј. да дође у m. Кад тај покушај поновимо, средишна тачка кончанице мора оба пута пасти у исту тачку m.



Сл. 21.

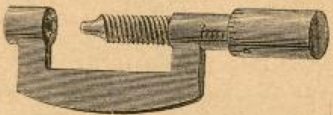
Та се проба може још и тако извршити да се хоризонтална оса дурбина окрене (леви крај да дође у десно лежиште и обратно) па се дурбином једна иста тачка посматра. Ако се у оба положаја та тачка угледа на истом месту у дурбину, онда значи да дурбин нема колимационе погрешке. При томе се претпоставља да су оба краја осе подједнако дебела.

Кад се са теодолитом посматра, онда се сваки поједини правац у два пут одређује и то једанпут са вертикалним кругом рецимо *лево* а други пут (окренувши справу за 180° око вертикалне осе) са тим кругом *десно*. Средња аритметичка вредност те две одредбе даће праву вредност траженога угла. Тим се начином избегава и тако звана *индексна* погрешка (пређе такође звана колимациона) као и ексцентрична погрешка кад на кругу има само један нонијус.

В. Микрометарски завртањ.

63. И ако се нонијусом могу врло ситне како дужинске тако и лучне величине одређивати и мерити, ипак се микрометарским завртњем дају исто тако ситне вредности и лакше и сигурније одредити. С тога је микрометарски завртањ нашао врло велику примену код разних научних справа за тачно мерење.

Микрометарским или *прецизионим завртњем* зове се са највећом тачношћу израђен завртањ, кога су висине

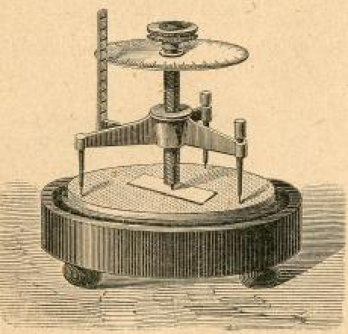


Сл. 22.

појединих завоја мали (обично 0·5 милиметра а кад што и мањи) и кога је глава по периферији на известан број једнаких делова подељена. Таквим се завртњем од 0.5 м.м. висине и главе од 1 до 3 сантиметра у пречнику, кад је брижљиво израђен, може лако дужина једног микрона (μ) одредити. Јер кад се такав завртањ од 0·5 м. м. висине завоја окрене у својој матрици један пут око себе, онда ће се он правцем своје осе помаћи за висину једнога завоја т. ј. за 0·5 м. м. На против, ако се завртањ окрене само за један извесан део пунога обрта, он ће се за исти тај део висине завоја помаћи правцем своје осе. И мерећи угао, за који се завртањ у својој матрици окрене, одређујемо сваки могући део висине једног целог завоја а тиме меримо врло мале и линијске и лучне величине. Јер ако главу завртња, кога је висина завоја само 0·5 м. м. висока поделимо на 500 једнаких делова, па окренемо главу само за n делова, врх завртња помаћиће се само за n хиљадитих делова једнога милиметра. Сл. 22 представља микрометарски завртањ најпростије врсте, који служи за мерење дебљина разних предмета до на $\frac{1}{20}$ део милиметра.

Микрометарски завртањ може бити тако удешен, да се он слободно окреће и помиче у сталној и непомичној матрици, или се завртањ окреће у месту а својим окретањем помиче матрицу кроз коју пролази. Први је начин употребљен код сферометра а други код деобне машине.

64. **Сферометар.** — Сферометром се служимо да веома тачно измеримо дебљину какве плочице, или дебљину какве



Сл. 23.

жице; исто се тако њиме одређује полупречник какве лопте од које имамо само један део, на пример код сочива. Због ове последње употребе, та се справа и назива сферометром.

Код сферометра имамо један тропожац (сл. 23) са завртањском матрицом, кроз коју пролази завртањ, завршен једним шиљком; на другом крају завртња, утврђена је једна кружна плоча подељена на извесан број (рецимо 500) једнаких делова. Ако су висине завртња од 0·5 милиметра, онда кад завртањ окренемо за једну поделу, врх се његов помакне за један хиљадити део милиметра. Један лењир утврђен је за једну ногу те справе и служи као значка за одређивање броја поделела за који се завртањ окрене. У осталом тај је лењир подељен на полумилиметре са нултом тачком горе; па како се котур спусти за један полумилиметар, кад се завртањ једанпут око себе окрене, то се тим лењиром може одређивати број пуних обрта завртња.

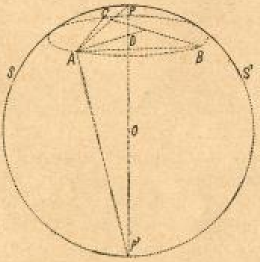
Да би се сферометром могли служити, треба да имамо једну сасвим равну површину. Најобичније је, та равна површина од стакла.

Пре него што ћемо том справом измерити што год, ваља да одредимо њену нулту тачку, т. ј. ону поделу на кружној плочи, која ће се поред лењира наћи, кад врх завртња додирне подлогу. Рецимо да је справа положена на равну подлогу и да је врх завртња изнад те подлоге. Спуштаћемо обртањем кружне плоче, врх завртња док у подлогу не удари; ако смо га сувише спустили, справа неће више стојати на својим ногама, већ ће је носити врх завртња и две само ноге. То ћемо одмах испод прстију познати, јер ће се справа нагнути, или ће се подупрта врхом завртња, стати око тога врха окретати. Одма ћемо завртањ вратити да справа стане на своје ноге и да врх завртња, допре до подлоге што ћемо после неколико проба постићи. Прочитана подела даће нам нулту тачку.

Кад је нулта тачка одређена, подметућемо под врх завртња плочицу, које дебљину хоћемо да измеримо и поступићемо као и мало час. Прочитавши нов положај на кружној плочи и одузевши га од пређашњег, добићемо дебљину подметуте плочице, до на 0·001 до 0·002 милиметра тачно.

Ако су плочице такве природе да их не можемо непосредно под врх завртња ставити, на пример ако су то танки листићи злата или што томе слично, ми ћемо их подметути под сасвим равну стаклену плочицу, којој смо претходно дебљину измерили, и на тај им начин дебљину одредити. На исти ћемо начин одредити дебљину танких жица или конаца па и влакана, кад их или савијене у круг, (пазећи при том да се не укрсте) или кад три мала комада наређена у облику троугла метемо под стаклену плочицу, којој дебљину знамо.

65. Не мање је важна примена сферометра за одређивање полупречника кривине појединим лоптастим деловима, на пример оптичким сочивима. Тога ради се сочиво, или део лопте SS (сл. 24.) утврди воском на каквој дашчици, па се на њ' положи сферометар својим трима ногама ABC и спуштањем завртња, одреди се на кружној плочи подела, код које врх зартња додирује у P површину сочива. За тим се сферометар положи на равну стаклену плочу и одреди нулта тачка. Одузимањем те две вредности добија се висина PD = h оне лоптасте површине, којој је основица онај круг, што пролази кроз три подножне тачке сферометра, и које праве равнострани троугао ABC. Означимо са a страну тога троугла, која се одређује мерењем растојања ма које две ноге сферометра, онда је полупречник r тога, око троугла описанога круга одређен обрасцем



Сл. 24.

$$r = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Означимо плупречник лопте OP, који ми у осталом и тражимо са ϱ онда из сличности троуглова DAP и DAP' имамо

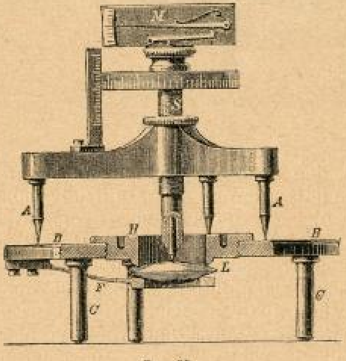
$$r^2 = h\,(2\varrho - h)$$

одавде је најзад

$$\varrho = \frac{a^2 + 3h^2}{6\,h} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (29$$

66. Једним се извесним сферометром може одређивати кривина само оних кривих површина, на које се он својим ногама може наслонити. На против ако је крива површина мања од размака између појединих ногу сферометра, онда се тим сферометром њен полупречник не може одредити. Да не би за сваки такав случај морали имати нарочите справе, обично су ноге сферометра помичне па се према потреби могу ближе или даље у краке саме справе утврдити.

67. Одређивање момента када врх завртња дира површину коју меримо није ни тако лако нити поуздано, нарочито ако то вршимо прстима као што је то горе речено. Због тога, више пута поновљена мерења једног истог предмета могу дати доста различне резултате. Да би дакле мерење сферометром било сигурније, праве се сферометри, код којих или нарочита казаљка или либела показују моменат када врх завртња додирује подметнуту површину. Таква једна справа представљена је на сл. 25.



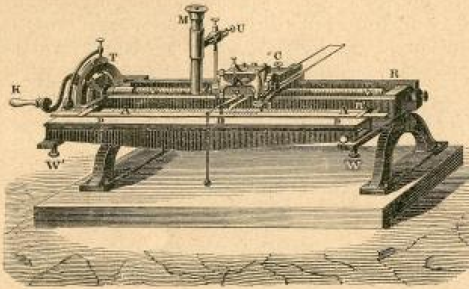
Сл. 25.

68. **Деобна машина.** — Као што само име казује, том се справом служимо да извесну дужину поделимо на извесан број једнаких или неједнаких делова, и да њоме уцртамо или изрежемо те поделе. Осим тога њоме се може врло тачно измерити извесна дужина и упоредити

са другом каквом дужином, те дакле може служити и као компаратор, особите конструкције.

Код деобне машине главни посао врши један *микрометарски завртањ*, кога су оба краја утврђена и непомична правцем осе завртња тако, да се тај завртањ у месту обрће, и *матрица* тога завртња, која се обртањем завртња помиче по целој његовој дужини. На матрици је утврђен нарочити нож за резање поделних линија и микроскоп за тачно посматрање појединих подела.

69. *Опис справе.* — Микрометарски завртањ v, v (сл. 26) лежи хоризонтално у нарочитом металном оквиру и

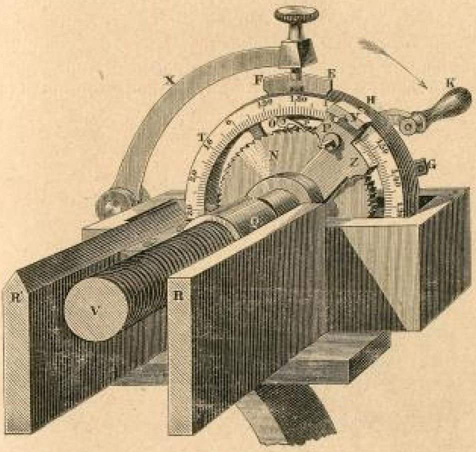


Сл. 26.

у њему се, као што смо споменули, у месту обрће. Матрица, кроз коју завртањ пролази и коју својим обртањем, правцем своје осе помиче, носи нарочиту направу *C*, која може да клизи по шинама R и R' и на којој је утврђен нарочити нож B и микроскоп M.

Као сваки микрометарски завртањ тако и овај има на једном свом крају на извесан број сасвим једнаких делова подељену главу; поред ње утврђена је полуга са једном цртом која служи као полазна црта за бројање подељених делова за које се завртањ обрне. Детаљи конструкције тога дела справе виде се на сл. 27.

Да се завртањ не би кварио, он се мора само у једном смислу обртати. С тога је удешено, да се матрица, кад стигне на крај завртња, отвори и клизањем, заједно са осталим својим деловима, премести у почетак завртња. Најважнији део на матрици јесте нож којим се урезују поделе у површину која се дели. Тај је нож од

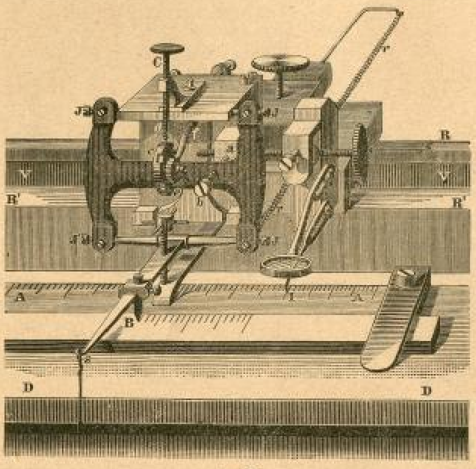


Сл. 27.

тврдог челика ако се поделе режу у металу или од дијаманта ако се реже стакло. Према томе, да ли ће урези бити плићи или дубљи и да ли је метал, који се реже мекши или тврђи, нож се мање или више нарочитим теретима притискује. Осим тога удешено је, да нож може повлачити црте разних дужина тако да на пример црте које показују целе сантиметре буду најдуже, оне које показују половине сантиметара да су мало краће, а оне које показују милиметре да су најкраће. Појединости у конструкцији тога дела справе види се на сл. 28.

70. *Удешавање паралелности.* — Оса предмета који хоћемо деобном машином да делимо или да измеримо, треба да буде паралелна са осом завртња; осим тога, не треба да је површина тога предмета нагнута, како би сви урези били једнако дубоки. И једно и друго постиже се микроскопом, који је утврђен на деобној машини и то на матрици.

Пошто се већ тај предмет на машини на нарочити начин утврди, (било да се само прилепи воском, било да се завртњима или опругама утврди) онда се микроскопом посматра један крај оне линије на телу, која треба да буде паралелна са осом завртња. Кад се то сврши онда се микроскоп премести на други крај и не дирајући иначе ништа на њему, посматра се други крај поменуте линије.



Сл. 28.

Тај други крај сада неће бити тачно у средини поља микроскопа ако линија није паралелна са осом завртња, нити ће се тачно видети у микроскопу, ако је тај други крај тела нижи или виши према првом. И једно се и друго нарочитим завртњима поправи и тако се паралелност предмета са осом завртња удеси.

71. *Оверавање завртња.* — Деобном ћемо машином само тако извршити поделу или мерење тачно и са прецизношћу, ако јој је завртањ тачан. Међу тим, ма како брижљиво био тај завртањ израђен ипак он није по целој својој дужини тачан. И пошто се у опште не може оче-

кивати да тачност буде апсолутна, то треба погрешност у изради завртња оверити и изнаћи.

Начин рада је сличан са оним кад смо код катетометра одређивали његову погрешност у дељењу. На стакленој или металној плочици повучемо две црте недалеко једну од друге и метемо под микроскоп. Завртњем се одреди што тачније растојање између те две црте. Сад се та плочица премести мало даље, па се опет завртњем даљина црта одреди и т. д.

По себи се разуме да ћемо, ако је завртањ у свима својим деловима савршено тачно израђен, на свима местима наћи једно исто растојање између црта. Не буде ли тако, ми ћемо из појединих разлика саставити таблицу и конструисати криву линију, која ће нам дати стање израде завртња и послужити да поједине његове делове међу собом упоредимо.

72. *Употреба деобне машине.* Деобном се машином могу ови послови свршити:

1. — Подједнако дугачке делове пренети на неко тело извесне дужине; на пример пренети на неко мерило извесан број милиметара. Ако су висине завоја завртња од 0·5 милиметра, онда треба два пут обрнути завртањ па онда спустити нож и повући милиметарску црту.

2. — Једну дату дужину поделити на извесан број једнаких делова. Треба на пример један термометар коме смо тачку мржњења и тачку кључања одредили, поделити на 100 или на 80 степена. Сад ћемо машином одредити растојање између поменуте две тачке на термометру и целу ту дужину поделити на 100 или 80 једнаких делова те наћи одговарајућу дужину свакога степена. Тиме смо у исти мах нашли за који угао ваља окренути завртањ и спустити нож.

3 Једну извесну дужину измерити или извршену поделу оверити. У горњим смо задацима и ове већ споменули. Из тога се види да деобна машина може да служи и као компаратор.

73. *Аутоматске деобне машине.* — Код свију мерења па била она дужинска или лучна, вршила се она катетометром или деобном машином, морамо се строго чувати утицаја температуре, јер се дужине свију мерила са променом температуре мењају. Самим приближавањем посматрачевог тела мерилу, ремети се његова дужина то-

лико, да се у тачним пословима то ремећење не сме, занемарити. Осим тога, код деобних машина долази и та незгода, што се радник, нарочито кад посао дуго траје, на пример кад треба повући више хиљада црта, замори па често и збуни те тако цео посао поквари. Због тога се за веће и тачније послове употребљавају аутоматске машине, које саме свој посао врше и без помоћи радника. На тај се начин избегава неједнак температурски утицај, који долази од радниковог тела, а и израда је много правилнија јер радна снага, за све време рада, остаје једна иста.

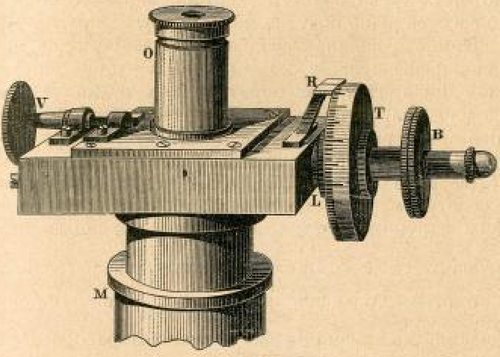
Данас су деобне машине, нарочито ове аутоматске јако усавршене. Таквим се машинама може повући до 5000 црта на милиметар.

74. *Кружна деобна машина.* — Овом се деобном машином служимо, кад хоћемо кружне делове на справама да делимо на степене и минуте. И код ње имамо један микрометарски завртањ са подељеном главом и ножем за резање црта, али немамо матрице. У место тога, завртањ тангенцијално захвата у зупце једнога котура, који се око своје осе окреће и који по периферији има 720 сасвим једнаких зубаца, којих се тачност нарочито овери и испита. Кружна плоча коју по периферији хоћемо да поделимо, мете се концентрички на тај изупчени котур, па се обртањем завртња, разни делови плоче доводе под нож и њиме зарежу. Зарези иду увек правцем полупречника кружне плоче.

75. **Окуларни микрометар.** — Микрометарски завртањ, спојен са кончаницом у окулару оптичких справа, даје нам најфинији инструменат за тачно мерење било дужинских било лучних величина. Први пут се њиме служио *Озу*, (Auzout) 1666 год. за астрономска посматрања а усаврши га Рамзден и други физичари.

У окулару свакога дурбина који служи за мерење, налази се на једноме оквиру један, два или више паралелних или два укрштена конца, који се зову општим именом *кончаница*. Ти се конци виде у исти мах кад и слика онога предмета, који кроз дурбин посматрамо. Кончаница се може с поља, једним микрометарским завртњем кретати; тако спојена кончаница са тим завртњем зове се окуларни микрометар. Сл. 29 показује нам општи изглед те справе. На тој слици *O* је окулар дурбина а

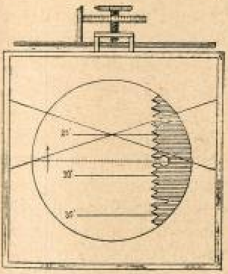
T подељена глава завртња, који улази унутра и који креће кончаницу. R је на једном непокретном комаду урезана



Сл. 29.

црта, која нам показује који део на микрометру ваља прочитати. Глава завртња подељена је обично на 60 или на 100 делова.

Сама кончаница удешена је према сл. 30. Ту видимо укрштена два конца, који се микрометром могу премештати. Осим тога видимо један низ зубаца са једним округлим и два дугуљаста зареза. Средина округлога зареза, показује средину виднога поља окулара. Остали зупци служе да нам покажу колико се пута завртањ око себе обрнуо, јер кад се он један пут око себе обрне, онда се кончаница помакне за један зубац. После сваких пет зубаца долази по један зарез а то нам помаже да лакше избројимо обрте завртња, нарочито кад их има много. Цифре 25', 30', 35', показују поделне минуте на апарату којим углове меримо.



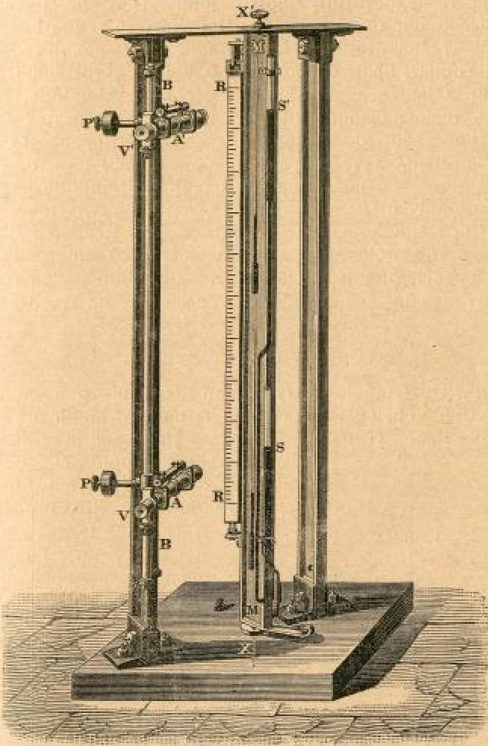
Сл. 30.

76. Пре него што почнемо мерити микрометром, треба да одредимо његову „дару“, т. ј. да видимо, колико пута треба обрнути завртањ, па да се кончаница премести са једне поделне црте до друге; другим речима да видимо за колико треба обрнути завртањ, па да кончаница пређе дужину, која одговара једној минути или једном милиметру, или обратно која вредност у минутама или милиметрима одговара једном пуном обрту завртња. Тога ради посматраћемо једну извесну познату дужину, на пример две црте удаљене за један милиметар или две црте удаљене за један минут, дакле у опште удаљене за a. Ако смо n пута обрнули завртањ (рачунајући и пуне обрте и делове обрта) док смо преместили кончаницу са једне црте на другу, онда је $\frac{a}{n}$ дара тога микрометра; то значи, кад завртањ један пут обрнемо, кончаница се премести за $\frac{a}{n}$ милиметара или минута. Ако смо у неком мерењу обрнули завртањ N пута онда је тражена дужина $N\frac{a}{n}$.

На горњој слици имамо поделу извршену од 5' до 5' и треба да нађемо колико минута (или секунда) долази на један обрт. Рецимо да смо обрнули завртањ пет пуних путâ и још за 3 поделна дела на глави завртња док је кончаница прешла од 25' до 30'; онда на један минут долази 1 обрт + 0·6 поделних делова, или на један обрт 1' — 0·6" или 59·4", дакле приближно 1'.

77. Кад дакле знамо да на један пун обрт долази једна минута т. ј. кад знамо дару тога микрометра а глава завртња је подељена на 60 делова, онда значи да свака подела одговара једној секунди. И мерење је таким микрометром врло просто. Слика нам показује да се оно место на кружној плочи, које ми имамо да измеримо, (и које пада у средину поља) не слаже ни са 25' ни са 30' али да је ближе ка 30'. Рецимо да смо степене већ прочитали и да смо нашли 58° + ових 25' + известан сувишак. Да тај сувишак одредимо, помаћићемо микрометром кончаницу да се са оном поделом поклопи која је мања; зупци нам показују да смо кончаницу помакли за три пуна зупца дакле за 3' и још један сувишак који

читамо непосредно на глави завртња рецимо 12". Али како су поделе на глави доста ретке, то можемо још да оценимо оком на пример $^3/_{10}$ једне поделе до онога места где се глава зауставила, онда значи да угао који смо тако измерили износи 58° 28' 12·3".



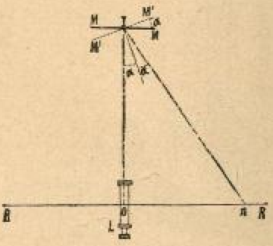
Сл. 31.

Окуларни микрометар налази се код свију прецизних оптичких справа као на пример код астрономских дурбина, код микроскопа, спектрометара и т. д.

78. **Микрометарски катетометар.** — Катетометар о коме смо већ говорили и код кога се ситни делови одређују нонијусом, не може се употребити за веома прецизна мерења, једно с тога, што сам нонијус не даје довољно сигурно веома ситне делове; а друго, што органске погрешке и недостатци много више утичу на резултат мерења кад је оно прецизно. Нарочито је тешко извести и одржати катетометарске стубове савршено праве, кад им је горњи крај слободан као у поменутој конструкцији па дакле изложен разним страним утицајима. Исто тако у непаралелности између мерила и осе катетометра лежи нов извор погрешака код тачнога мерења. С тога се у последње време праве микрометарски катетометри, код којих се ситне величине одређују микрометрима у место нонијусом; код којих горњи крај стуба није слободан већ такође утврђен и код којих мерило није на самом стубу, који носи дурбине већ је одвојено. Таква једна справа којом се данас на најтачнији начин одређују дужинске величине представљена је на сл. 31.

С. Оптичка полуга.

79. Оптичка је полуга најосетљивија и најтачнија справа за мерење како ситних величина линијских тако и веома малих угловних скретања. Основана је на једном закону с којим ћемо се детаљније упознати у оптици а који гласи: Кад огледало, са кога се један светао зрак одбија, скрене за угао α, одбијени ће зрак скренути за угао $2\,\alpha$.



Сл. 32.

Огледало MM (сл. 32) скренуло је у положај $M'M'$ за угао α. У дурбину L у коме се мало час читала тачка о једне скале RR која је изнад или испод њега утврђена, чита се сад тачка n која у исти мах показује даљину оn у милиметрима и од које долази зрак у дурбин под углом $2\,\alpha$.

Из троугла оIn имамо:

$$\mathrm{tang}\ 2\alpha = \frac{n}{Io} \cdot = \frac{n}{d}.$$

ако даљину скале од огледала означимо са d. Пошто су углови који се тако мере врло мали а остојање d може бити врло велико, то се може место тангенте узети сам угао па је онда

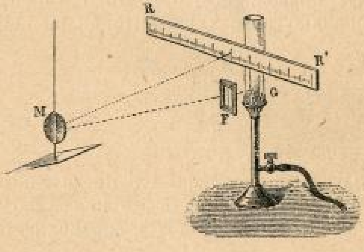
$$2\alpha = \frac{n}{d} \quad \text{или} \quad \alpha = \frac{n}{2d} \tag{30}$$

Овај начин мерења ситних углова долази од Погендорфа.

Тачност и осетљивост ове врсте мерења нема границе јер ми можемо даљину d узети колико хоћемо велику; у колико је пак она већа у толико је справа осетљивија, а мерење тачније.

80. Да видимо сада како је још тај оптички закон примењен у практици.

1. Распоред представљен на сл. 33 показује нам како се објективно мере веома слаба скретања магнетске игле,



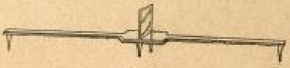
Сл. 33.

галванометара и т. д. код којих се скретање увек пренесе на једно мало огледало M. Огледало M је шупље и баца стварну слику од уреза F по подељеној скали R R'.

2. Полуга, као што је представљена на сл. 34. и коју је пронашао француски физичар Корни *) служи за

*) *Cornu*, Journal de physique 1875, IV.

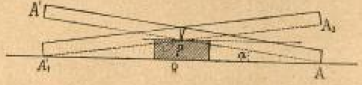
мерење дебљина разних предмета и замењује сферометар. Она се у средини ослања на два шиљка а на крајевима носи друга два шиљка или може бити и без њих.



Сл. 34.

Изнад средњих шиљака утврђено је једно равно огледало.

Кад је полуга на равној површини, она додирује ту површину свима шиљцима. Али ако испод средња два шиљка подметнемо какву плочицу Q (сл. 35.) којој



Сл. 35.

дебљину δ хоћемо да одредимо, полуга ће се нагнути час на једну па онда на другу страну. Ако смо већ удесили да у огледалу читамо дурбином на горе поменути начин, ми ћемо прочитати на скали најпре n па онда n' поделака. Ако нулта тачка скале лежи у правој која је на огледалу управна, онда ће бити $n = n'$ и из угла α који заклапа полуга са хоризонтом, наћи ћемо дебљину по обрасцу

$$\delta = l \sin \alpha \qquad (31$$

или приближно

$$\delta = l \alpha \qquad (31'$$

где је l дужина AP.

Кад полуга из положаја AA' пређе у положај $A_1A'_1$ онда се она окрене а с њом и огледало за угао $2\,PAQ = 2\alpha$; зрак који се од огледала одбија, скреће два пут јаче но само огледало, дакле α је $\frac{1}{4}$ онога угла који се дурбином и скалом на остојању d мери. Према томе је

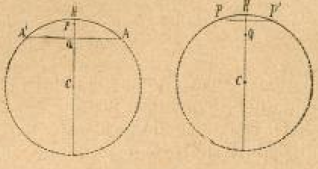
$$\alpha = \frac{n + n'}{4d}$$

а тражена дебљина

$$\delta = l \frac{n + n'}{4d}. \qquad (32$$

3. Видели смо да за одређивање дебљина, оптичка полуга потпуно замењује сферометар. Исто се тако могу њоме одређивати и полупречници кривина кугластих површина дакле сочива.

Полуга се постави на сочиво средњим шиљцима P и P' (сл. 36.) тако да се нагне час на једну па на другу страну. Тиме се одреди n и n', као и мало час. Строго узевши шиљци не стоје на самом врху кривине H, него мало ниже у P, али пошто су шиљци врло близу, може се без велике грешке узети да је $QP = HQ$. Означимо ту величину $QP = HQ = h$, онда одредбом угла α на познати начин имамо



Сл 36.

$$h = l \sin \alpha.$$

или пошто је α врло мало

$$h = l\,\alpha.$$

кад би P и H пало заједно, онда би било

$$l^2 = 2\,R\,h$$

Одакле

$$2\,R = \frac{l^2}{h} = \frac{l}{\alpha}.$$

Строго узев то не бива, па зато ако са z означимо ону разлику PH имамо

$$HA^2 = 2\,R\,(h + z)$$

или пошто је HA приближно $= l$,

$$l^2 = 2\,R\,(h + z)$$

Ако остојање шиљака P P' означимо са $2\,e$ имаћемо:

$$z = \frac{e^2}{2R - z}$$

или приближно

$$z = \frac{e^2}{2R}$$

Према томе:

$$l^2 = 2R\left(h + \frac{e^2}{2R}\right)$$

и најзад

$$2R = \frac{l^2 - e^2}{h} = \frac{1}{\alpha}\left(1 - \frac{e^2}{l^2}\right) \qquad (33$$

где под α ваља увек разумети четвртину на кривој површи, посмотренога угла.

Оптичка се полуга даје још на друга разна мерења употребити и Корни је њоме мерио вредности, које се упоређују са величинама светлосних таласа. Нарочито се велика осетљивост постиже кад се полуга скрати а даљина посматрања *d* што више увећа.

II. ДЕЉИВОСТ

81. Тело. — Материја, коју смо нашли у природи, не испуњује једноставно цео простор, него се налази подељена на веће или мање делове. Такав један ограничени део материје зове се *тело*. Свако је тело ограничено *површинама* т. ј. таквим геометријским облицима, који имају две димензије (дужину и ширину на пример); границе површина су *линије* т. ј. такви геометријски облици који имају само једну димензију (дужину); најзад линије се граниче *тачкама* које немају ни једне димензије.

Према томе свако тело има: 1) своје *димензије*, које се простиру у три једно на друго управна правца и зову се дужина, ширина и висина (или дебљина) тела, 2) своју *запремину* или величину простора које је оно заузело и 3) свој *облик*, који зависи од равних или кривих површина којима је тело ограничено.

Свако се тело даје делити на још мање делове и та се деоба може тако далеко продужити, да те делове не можемо извесним чулима опазити. Јер ако је једно тело мање од 0·01 милиметра, ми га прстима више не можемо напипати; ако је угао зракова, који са некога тела долази у наше око мањи од једне минуте, ми га више голим оком не распознајемо.

Има тела, која се на врло ситне делиће дају делити: метали ковањем и извлачењем, размекшано стакло испредањем и дувањем, крта тела туцањем и трењем, лиснате и кончасте материје цепањем и загревањем, и т. д. Много даље иде још деоба, коју већ у природи извршену налазимо а нарочито код животиња. Најзад деоба извесних обојених материја у течностима, извесних мирисних материја у ваздуху превазилази сваку обичну меру и показује у исти мах велику осетљивост наших чула, ока, мириса и укуса за извесне утиске.

82. **Молекил.** — Међу тим ма како се далеко може терати деоба тела, ипак она има својих граница. Једно се тело може делити на све ситније и ситније делиће а да опет сваки тај делић задржи све особине целога тела. И најмањи делић некога тела, који има све особине целога тела (и који још једном само подељен губи те особине) зове се *молекил*.

Облаци су састављени из све самих водених капљица или мехурића*), који се, сваки за се не могу видети. И свака та капљица ма како она малена била има све оне особине које има и вода у реци. Али ако је тај водени мехурић тако мали, да кад би га (бар у мислима) још једном поделили, да престане бити вода, и да се распадне на друге састојке који нису више вода већ на пр. кисеоник и водоник, онда би тај мехурић или капљица била водени молекил.

Исто тако кад растворимо грумен соли у води, сва вода постане слана. У свакој и најмањој капи воде има хиљадама сȏних зрнаца које свако за се има све оне особине какве има и цела крупица соли. Ако су сад та зрнца соли у води тако ситна, да кад би свако од њих још само један пут поделили, оно би престало даље да буде со, него би се распало на своје саставне делове (натријум и хлор) који више нису со, онда би свако то зрнце било један молекил соли.

Пошто се свако тело деобом може поделити на молекиле, онда следује да су сва тела у природи састављена од све самих молекила.

83. **Атом.** — Они пак делићи које добијамо кад делимо молекиле, зову се *атоми*. Тако на пример молекил соли распадне се деобом на атоме хлора и натријума,

*) Права природа тих елемената, за сад није дефинитивно утврђена.

молекил воде подели се на атоме кисеоника и водоника и т. д.

Атоми су најмањи делови материје и даље се не могу делити. (Само име „атом“ значи „недељив“).

Сви молекили немају један исти број атома. Тако на пример молекил кухињске соли има један атом хлора и један атом натријума; један молекил воде има један атом кисеоника и два атома водоника; један молекил амонијака има један атом азота и три атома водоника; један молекил барског гаса има један атом угљена и четири атома водоника; један молекил сумпорне киселине има два атома водоника, један атом сумпора и четири атома кисеоника; један молекил обичног алкохола има 12 атома; један молекил глицерина има 20 атома; један молекил шећера има 68 атома; један молекил динамита има 172 атома и т. д.

84. **Ћелија.** Кад делимо тела животиња и биља, која се још називају *органска* тела за разлику од осталих, *неорганских* тела, онда пре но што дођемо до молекила наилазимо на извесне делове из којих је свака животиња и биљка састављена и који се зову *ћелије*. Кад ћелије даље делимо, наилазимо на молекиле а после ових на атоме. Ћелијâ нема у неорганским телима, а сва су органска тела састављена из ћелија.

Пошто је целокупна материја у природи подљена на све сама тела, а свако тело можемо поделити или непосредно или прошав кроз ћелије на молекиле а ове опет на атоме, онда следује да је сва материја у природи састављена из све самих атома.

85. Ма како били мали атоми из којих је целокупна материја састављена ипак они имају своју одређену *величину*, своју одређену *тежину* и извесан *облик*.

Целокупна материја у природи није састављена из једних истих атома. У опште узев, у природи има онолико врсти атома колико има хемијски простих тела. Али сви атоми једног истог простог тела ма у каквим се они једињењима налазили имају исту *величину*, и исту сталну и непромењиву *тежину*.

Говерећи о тежини атома ваља напоменути да ми незнамо апсолутну тежину њихову али је позната њихова релативна тежина т. ј. знамо колико је атом једног елемента тежи или лакши од атома другог. Тако су одређене релативне тежине атома свију елемената а за јединицу узет је атом водоника, као најлакши.

Што се облика атома тиче, у науци владају у главноме два разна мишљења. По једноме, атоми имају облик кристала у коме дотични елеменат кристалише. На пример антимон, који се цепа на све саме ромбоедре, имао би атоме ромбоедарског облика. Код елемената који се на коцке цепају, атоми би били коцастог облика и т. д.

Вероватније је и простије друго мишљење, по коме су атоми свију елемената округли, пошто се ређањем кугластих атома могу такође добити сви облици, па били они кристални или не а међу тим, многе се хемијске радње могу лакше објаснити, претпоставком да су атоми кугласти.

86. Што се самог наслагања молекила и атома у телима тиче, има врло много појава, које нас упућују да претпоставимо, да се ни атоми ни молекили међу собом не додирују већ да су један од другог више или мање удаљени. Сама факта, да се код свију тела притиском може запремина да смањи, да се сва тела на топлоти шире, да дакле у опште своју запремину мењају, а да не говоримо о другима довољна су, да оправдају горњу претпоставку. Па с тога ћемо од сад замишљати, да је цела материја састављена из молекила ови опет из атома и да се ни једни ни други међу собом недодирују већ су један од другог више или мање удаљени. А између молекила и атома свију тела и у опште у целој васељени, налази се једна веома фина невидљива и немерљива, имнондерабилна материја или супстанција, која се зове *етар.* *)

Наслагање етра око молекила ваља разумети тако, да је етар око сваког молекила гушћи но тамо где тих молекила нема, те према томе сваки је молекил омотан једном врстом етарске атмосфере. То згушњавање етра око сваког молекила долази услед привлачења молекила на етар.

87. Пре него што завршимо овај одељак о дељивости материје, да наведемо неколико интересних примера природне и вештачке поделе материје.

*) *W. Thomson.* — Philos Magazin 4 серија B XXXIV, XXXVII.

Величина појединих тела у васељени иде од бескрајно великих до тако исто ситних. Цела се кумовска слама сматра у астрономији као једна целина, као једно тело, а пречник јој је толики да светлости треба 8000 година да га пређе, (прелазећи сваке секунде по 300000 километ.) — Комете могу да достигну са својим реповима по више милијуна километара. — Сунца су хиљадама километара велика. — Наше сунце које долази међу мање звезде, тако је велико да се од њега може направити 1,400.000 кугала ове величине као што је наша земља. Према томе његова запремина износи 3736 билијуна кубних миља рачунајући у свакој куб. миљи 408.591,166.731 кубних метара —

Наша је земља ове величине по Фају, (Faye):

Велика полуоса, или полупречник екватора $= 6,378.393^m \pm 79^m$.

Мала полуоса или поларни полупречник $= 6,356.594^m \pm 109^m$.

Спљоштеност . . . . $= \frac{1}{292 \pm 1{\cdot}0}$ *).

Као год што је немогуће схватити величину небеских тела, исто је тако тешко представити себи запремину бескрајно ситних тела. На један кубни сантиметар долази више од једне милијарде инфузорија. Међу тим свака од њих има свој стомак, кога су дуварови обрасли длакама које трепере и сокове његове крећу. Кад се још помисли да је свака та длака врло сложене грађе, онда се тек добија прави појам о бескрајној маленкости њеној. — У једном кубном милиметру крви има пет милијуна крвних зрнаца. — Нарочито су важни и итересни панцири неких дијатомацеа (на пример од Pleurosigma augulatum и од Amphipleura pellucida) на којима се налазе паралелне црте тако фино повучене, да су једна од друге удаљене само за $\frac{1}{5000}$ м. м. — На површини од 5 хвадратних милим. на крилу једног младог лептира налази се 931.800 зрнаца бојног прашка. — У једној капи устојале воде, види се микроскопом безброј ситних животиња са потпуно развијеним органима. У некима од њих које се провиде, види се како куцају крвни судови и како у њима циркулишу обојене течности

Крта тела, на пример стакло, може се толико ступати да се ни испод прстију више зрнца не осећају нити се оком могу видети. Та су зрнца онда мања од 0·01 м. м. Међу тим се та зрнца осете између зуба. Даљим трењем и туцањем могу се зрнца толико уситнити да се ни између зуба не осећају. Онда се она могу још видети микроскопом и мања су од 0·001 м. м. — У живиним мелемима (белилу), живине куглице имају једва $\frac{1}{200}$ м. м. па с тога могу врло лако продирати кроз поре у унутрашњост тела.

Кад се у једну велику флашу воде, у коју смо растворили неколико груменчића кухињске соли спусти само једна кап раствореног нитрата сребра, цела ће та вода побелити као млеко

*) Annuaire du Bureau des Longitudes. 1897.

Кад је изложимо сунчевим зрацима, она ће поцрнити. У оној капи нитрата сребра једва да је било сребра $\frac{1}{10}$ део куб. милим.; онда излази да је свако оно поцрнело зрнце у флаши велико једва један билијунити део једног кубног милиметра и да их само у једном кубном милиметру има један билијун. Да би бар имали појма о величини тога броја, ваља знати да кад би неко хтео избројати један билијун секунада, бројећи и дању и ноћу, да би му за то требало 31.675 година.

У најделикатније механичке радове спада израда оптичких решетака, које служе за добијање нормалних спектара и одређивање таласких дужина светлости. И професор Роланд (Rowland) у Балтимори направио је таких решетака код којих 1700 црта иде на један милиметар — Перо (Perreaux) је својом деобном машином поделио један милиметар на 3000 делова. — Нобер (Nobert) је направио оптичке решетке са по 4000 црта на милиметар, а видели смо да има деобних машина које могу повући 5000 црта на један милиметар.

Од стаклета се могу издувати листови од $\frac{1}{5000}$ м.м. дебљине. Један стаклар извукао је тако танке конце од стаклета, који под микроскопом нису били дебљи од конца којима крсташ паук плете своје мреже. — Кад се сребро галвански позлаћује, слој позлате није дебљи од $\frac{1}{100.000}$ м. м. — Злато се да расковати на листове од $\frac{1}{12000}$ м. м. — Дебљина позлате сребрних конаца код финих лионских чипака износи $\frac{1}{20000}$ м. м. — Микрометром Рамзденовим може се мерити $\frac{1}{500}$ део дебљине једног чевечијег влакна из косе $\left(\text{дакле од прилике } \frac{1}{6000} \text{ м. м.}\right)$ — Лискун се да поцепати на листиће од којих више од 100 иде на један милиметар.

И од платине се дају извући жице веома танке. Воластон је извукао платинску жицу од $\frac{1}{1200}$ м. м. Кад се 140 таких жица исплете, једва изнесу дебљину једног свиленог конца. То је можда најтања метална жица, која је до данас направљена. Да би је добио. Воластон је узео једну платинску жицу од 0·25 м. м. дебљине и утврдио у оси једног цилиндарског калупа, од 5 м. м. у пречнику па га је залио сребром. На тај начин добио је сребрну жицу од 5 м. м. дебљине а у њеној средини била је горња платинска жица. Сад је ту сребрну жицу развукао у веома танак конац у чијој је средини била још тања платинска жица. Да би њу одвојио од сребра, он је сребрну жицу искувао у азотној киселини која је сребро растворила, Средња величина водених капљица или мехурића у облаку може се лако одредити из пречника обојених колута, који поставу кад тај облак покрије сунце или месец. Кад је пречник унутрашњег колута 15°, онда мора да је пречник водених мехурића у облаку од прилике $\frac{1}{500}$ м. м.

У какве се многобројне тачке распе мала количина какве материје и тамо своје дејство производе, или другим речима, на колико се ситних делића може једна материја да раздели, показују све бојне материје и хемијски реагенти. Јер се може открити

амонијаком . . . . 0·0000064 гр. оксида бакра
сумпорном киселином . . . 0·0000025 барита
хлороводонич. кисел. . . . 0·0000012 оксида сребра
сумпороводоником . . . . 0·0000001 јода.

Са 0·05 грама кармина може се обојити 10 литара воде; онда излази да се тај кармин разделио на 154 милијуна видљивих делића. — Исто толика количина бакарног амонијака растворена у води подели се на 393 милијуна делова. — Спектралном се анализом може констатовати $\frac{1}{3000000}$ део једног милиграма натријума. — Једна кап индига распадне се у води на тако ситне делиће да их има преко 10 билијуна у једном кубном сантиметру.

Ма да те цифре показују тако велику дељивост материје, да је не можемо никако себи довољно јасно представити, ипак изгледа да је та дељивост у још већем размеру изведена код миришљавих материја, са претпоставком наравно, да свуда онде где ми какав мирис осећамо, мора бити делића оне материје која мирише. Тако на пример Бојл (Boyle) је нашао да је 30 грама мускат-ораја изложени слободном ваздуху изгубило за 6 дана 0·27 грама. — Пет сантиграма мошуса могу да намиришу стан кроз више година и ако се ваздух у њему врло често обнавља. И кад се помисли да се на сваком могућем месту где тај мошус мирише морају налазити његови делићи онда је немогуће замислити ни маленкост тих појединих делића нити њихов број. Asa foetida миришући 6 дана изгубила је 0,005 грама од своје тежине. Према томе излази да је у сваком кубном сантиметру намирисаног ваздуха било преко 1000,,000.000,000.000 делића.

Позната је ствар како је код извесних животиња развијено чуло мириса. Гемза осети ловца на више стотина метара, само ако је ветар подесан. Како ситни морају бити они делићи, који са површине ловчевог тела иду у ноздрве те животиње! Ловачки ће пас на врло великој даљини нањушити траг зеца и истерати га пред ловца. И свуда онде, где је зец прошао морало је остати његових делића које је ветар разнео и од којих је само један мали део остао по трагу, који је пас нањушио.

III. ШУПЉИКАВОСТ

88. Говорећи о наслагању молекила у телима, видели смо, да се молекили међу собом не додирују него да су између себе више или мање удаљени. Услед тога између молекила остају веће или мање празнине, које се зову *шупљике* или *поре*, а особина материје, по којој она мора бити тако састављена да између њених појединих делића буде празнина, зове се шупљикавост или порозност.

Има тела, код којих су шупљике врло велике (сунђер, лебац); код других нису велике али се ипак лако виде на пример код шпанске трске кад гледамо на пресеку, виде се канали кроз које су, док је расла, текли сокови, а који су сада остали празни. Микроскопом се код врло многих тела виде шупљике нарочито код тела биљног или животињског порекла.

Па и она тела, код којих се поре не виде ни микроскопом, на пример метали, и она су порозна. Јер се код свију до сад познатих тела може притиском запремина смањити, као год што се зна и то, да сва тела на топлоти своју запремину мењају а то може бити само тако, ако су сва та тела шупљикава или порозна.

Експерименти су многобројни помоћу којих се доказује шупљикавост тела. Кад се комадом врло тврдог дрвета, које изгледа да је без икаквих шупљика затвори једна стаклана цев па се с једне стране наспе жива а с друге се стране извлачи ваздушним шмрком ваздух, жива ће проћи кроз невидљиве шупљике дрвета и падати у цеви као киша. — И кроз учињену кожу се може протерати жива и то је у исти мах начин, на који се жива чисти од прашине и нечистоће. — Кад се у чашу воде мете јаје па се из чаше извлачи ваздух под звоном ваздушног шмрка, видеће се, како ће ваздух из јајета излазити кроз шупљике љуске и избијати кроз воду. Због тих шупљика љуске, могу јаја и на обичном ваздуху да испаре па за то се она јаја, која се хоће дуже времена да сачувају, мажу или масним материјама или се мећу у угашен креч који ће њихове поре затворити.

Да су камење и зидови наших кућа шупљикави показао је Петенкофер овим интересним експериментом. С обе стране једне дебеле камене плоче или дебелог зида од цигаља херметички је утврдио по једну цев а све је остале делове камена и зида намазао гипсом и смолом. И кад се с једне стране зида дува у цев с друге се стране то дување тако јако осећа, као да нема ни зида ни камена; на пример може се кроз зид обичним дувањем угасити свећа, може се кроз зид провести светлећи гас и с друге стране запалити и т. д. Влажни су зидови нездрави јер сметају циркулацији ваздуха.

Нарочито интересан пример шупљикавости налазимо код тако званог *тебашира* или бамбусног шећера, који се скупља у чворовима старе бамбуске трске. Кад је сув сасвим је непровидан, а кад се замочи у воду неко време он упије у се воде више но што је сам тежак и постане провидан. Исту особину имају неки минерали на пример хидрофан, који кад изгуби своју воду изгуби и сјај и провидност а чим се у воду замочи и довољну количину у се усише, опет их поврати. — Креда врло брзо усише воду, мрамор већ спорије али много брже мрамор упија зејтин.

Шупљикавост метала доказана је између осталога експериментом, који је извршила Academia del Cimento у Флоренцији 1661. Она је напунила једну шупљу сребрну куглу водом и изложила је јаком притиску. Није дуго прошло а кугла се по површини оросила водом, која је прошла кроз њене поре. — Кад се метали загреју, њихове се поре рашире и кроз такве угрејане нарочито пак усијане метале гасови лакше пролазе. С тога код усијаних металних фуруна гасовити продукти сагоревања улазе у собу.

Кад се прави легура од калаја и бакра за телескопска огледала, налази се, да је легура за 7—8 процената мање запремине од суме запремина појединих метала. То може настати само ако је један метал продрео у поре другога.

Кад се у једну стаклену цев наспе 27 куб. сантим. воде а преко ње пажљиво сипа 23 куб. см. обојеног алкохола па се обе течности добро измешају, опазиће се, да је мешавина за 3·6 процента мање запремине, но што су имале исте те две течности пре мешања.

Кожа човечијег тела као и кожа осталих животиња пуна је већих или мањих пора кроз које једни сокови испаравају а други улазе у тело. Јер човек не дише само плућима него и целом кожом. При купању, вода кроз поре улази у тело а лечење масажом оснива се на томе, што се извесни лекови трљањем кроз кожне поре унесу у тело. — Шупљике или отвори знојних жљезда тако су многобројни у кожи човековог тела, да на длану и само на површини колико покрије један динар, можемо набројати 2300. По целом их телу има 2831000 и кад би их све саставили, рупа би била велика као обичан тањир. Сваки отвор знојне жљезде у вези је са знојним каналом који је дугачак $6^1/_2$ милиметара, па пошто тих канала има скоро три милијуна, то цела дужина знојних канала у човечијем телу износи од прилике 15500 метара. Ето тај еластични систем канала регулише бржим или споријим испаравањем, већим или мањим губитком топлоте, топлоту нашега тела тако, да и црнац и ескимос имају исту топлоту крви $37^1/_2{}^\circ$ Целз.

Древна стабла не само да су пуна шупљика и пора кроз које циркулишу сокови, него изгледа да облик тих пора зависи од врсте дрвета, јер се микроскопским испитивањем пора и ћелија окамењених и фосилних дрва може одредити врста дрвета. Првобитни материјал од кога је дрво било састављено још је пре више милијуна година исчезао па је се ипак структура дрвета очувала јер су силикатне и кречне материје ушле у заостале шупљине, примиле на се њиове облике и счврснувши очувале потпуне копије несталих оригинала.

89. Као што смо видели поре и шупљике у материји постају услед наслагања молекила или група молекила на тај начин, што између њих остају веће или мање празнине. Међу тим не треба мислити да у тим međупросторима нема ничега. Ми смо видели да је целокупна материја прожмана етром и њега свакако има у порама и међу молекилским празнинама и понаша се у њима од прилике онако као ваздух у шупљикама сунђера или леба.

90. Органска материја постаје наслагањем ћелија а кристаласта неорганска наслагањем кристала, и при том наслагању остаје увек празнинâ, које нису ништа друго до поре. Пошто су ти елементарни делићи увек мањи но зрнца у најситнијем прашку, то онда морају она тела која ми вештачки из прашкова притиском правимо (графит, земљани судови и т. д.) а тако исто и у води наслагано земљиште и камење много веће шупљике имати.

Течности код којих су молекили веома покретљиви, те у сваку празнину лако продру, имају само мање молекилске међупросторе у које могу друге течности и гасови уђи. Због тога се течности притиском врло слабо дају стиснути. Код гасова су ти међумолекилски простори врло велики, због чега се гасови и понашају као веома шупљикава тела ма да шупљика у правом смислу те речи немају.

91. Она чврста тела, која су постала счвршњавањем начастих материја, тако звани *колојиди* услед самог свог постајања немају никаквих елементарних делића (ни ћелија ни кристала) па с тога ни већих празнина или шупљика, те ни њихови молекилски међупростори не могу бити велики. За то су сви колојиди, (као што је стакло и све врсте смола и гума), за тим ковани, ваљани и извлачени метали врло мало шупљикави. Кад се пак сва та тела загреју, па дакле размекшају, њиови молекили постану много покретљивији, и онда могу гасови који или лако дифундирају, као на пример водоник, или које молекили тих колојида жељно себи привлаче, у великим количинама у њих уђи. На пример кована платина кад се црвено усија, може усисати четворогубу своју запремину водоника; ковани паладијум усише 600 губу своју запремину водоника, гвожђе четворогубу своју запремину угљеноксида, сребро много кисеоника и т. д. Кристаласти метали, као што је антимон не упијају никако гасове јер су им поре тако велике да га у себи не могу задржати. Отуда неки научари разликују три врсте шупљика или пора у телима: 1. Шупљике које кроз масу тела праве читаве отворене канале тако да гасови кроз њих врло лако пролазе; такве су на пример шупљике код вештачког графита. 2. Шупљике кроз које гасови тек под притиском или услед привлачења околине пора могу да прођу; такве су поре код дрвета и камења. 3. Шупљике у које долазе гасови само услед неке врсте хемијског сродства саме материје према њима. Те се шупљике налазе код колојида, код прерађених метала и течности и по свој прилици су само молекилски међупростори.

92. Са шупљикавошћу стоји у тесној вези ширљивост и стисљивост материје или у опште промењљивост запремине код тела, свакако пак без промене њихових

маса. Кад се само сетимо онога што смо до сад говорили о наслагању молекила у телима и постајању шупљика, онда се та промена запремине тела сама собом разуме.

У опште узев има два начина да се запремина тела промени: променом спољашњег притиска у једном или више праваца и променом унутрашње количине топлоте у телима.

Сва се тела не шире нити скупљају подједнако, било да то изазивамо променом притиска или променом топлоте. Најлакше се и најправилније сабирају и шире гасови. Чврста се тела врло разно понашају, и у толико се лакше дају сабити у колико су им шупљике веће. Сунђер и плута мењају своју запремину кад их просто у руци згњечимо. Метале сабијамо ковањем, притиском или ваљањем. — Суво дрво потопљено неколико дана у води, промени своју запремину и то много више у правцу попречном но уздужном. Кад се у липово углађено дрво утисну писмена, па се стругањем околних делова ти утисци изравне, за тим се потопи у воду, онда ће се мало час утиснута писмена испупчити и остати испупчена и пошто се дрво осуши. — Кад се комади дрвета изложе јаком притиску па се одмах у воду баце, потонуће. Ако је притисак дуже време дејствовао, дрва не заузимају више своју првашњу запремину. И плута се даје тако сабити да постане тежа од воде. — Исто се тако понашају дрва сабијена на великим морским дубинама. Кад се дрва, спуштена у дубину мора на 2000 метара на поље извуку, налази се да садрже у себи 0·8 своје тежине воде и тону у воду као камен. Отуда долази и то, да кад једна лађа потоне близу обале, дрвени њени делови испливају на површину, а кад потоне у дубине морске, онда дрво услед јаког притиска воде толико се згусне да не излази више на површину.

Течности се у опште врло мало дају стиснути притиском. За воду на пример под притиском од 100 атмосфера износи стисљивост $\frac{1}{200}$, а за живу само $\frac{1}{30000}$ запремине. Кад се вода у топовску цев, које су дуварови 6 cm дебели, затвори и јаком притиску изложи, цев ће пре прснути но што ће се вода за $\frac{1}{20}$ део своје запремине стиснути.

О промени запремине тела услед промене количина топлоте, која је у њима, биће говора у науци о топлоти.

93. Пошто једна иста количина материје изложена јачем притиску заузме мању запремину и обратно, то следује да густина материје у притиснутом и непритиснутом телу није иста. И кад се маса тела M не промени, онда густина некога тела D зависи једино од његове запремине V. Густина ће неког тела бити у толико већа у колико при истој запремини буде имало више масе; дакле густина је управо сразмерна маси. На против код једне исте масе, густина је већа кад је запремина мања; дакле густина је изврнуто сразмерна запремини. Кад та два односа изразимо алгебарски имаћемо

$$D = \frac{M}{V} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (34$$

одакле

$$M = D\,V \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (35$$

Кад ставимо $V = 1$ излази $D = M$ те према томе: *густина некога тела јесте маса његове јединице запремине.*

IV. НЕПРОБОЈНОСТ

94. Да материја мора заузети извесан простор видели смо напред. Сад имамо још да додамо и то, да матетерија заузевши већ једном неки простор тежи и да га одржи и догод је она тај простор заузела, друга нека материја не може га у исти мах заузети. Другим речима два тела не могу у исти мах заузети исто место у простору, јер је *материја непробојна.*

Пипање нам већ даје прве знаке о непробојности, јер осетимо увек неки известан отпор кад хоћемо, место другог неког тела да заузмемо. Тај отпор, који тако на наше чуло такнућа дејствује јесте и једини стварни доказ о материјалном постојању тела, пошто су остала чула много мање тачна. Тај је отпор у толико већи у колико је већа маса, коју имамо да уклонимо. Кад ходамо по мирном ваздуху ми га готово никако не осећамо; пре ћемо га осетити кад трчимо или кад уз ветар идемо а још јаче кад кроз воду газимо. Највећи део снаге парних лађа као и један велики део снаге локомотива троши се на уклањање воде или ваздуха те да њихова места заузму.

Код чврстих и течних тела, та се особина материје даје лако доказати. До врха напуњена чаша прелиће се кад у њу прст замочимо. — Кад какво чврсто тело потопимо у воду, површина воде издићиће се у суду за онолико, колика је била запремина потопљеног тела; то је врло згодно употребљено да се одреди запремина неправилних тела. Код гасова изгледа на први поглед да закон о непробојности не вреди. Међу тим од тог закона нема изузетка. Кад назови празну чашу изврнемо у воду, вода је не може до дна напунити пошто у чаши има ваздуха који је непробојан. — Кроз левак, који сасвим затвара грлић флаше не може течност отицати, све док ваздуху, који је у флаши не отворимо пролаз. На непробојности оснива се пређашња употреба ронačког звона, које се у новије време замењује стакленим шлемом и оделом од каучука (скафандер).

V. АГРЕГАТНА СТАЊА МАТЕРИЈЕ

95. До сада смо говорили о материји у опште' не обзирући се на неке њене особине, које материја може на себе примити према приликама и према другим страним утицајима. Јер ако материју посматрамо са гледишта да ли се *облик*, који она у неком телу има даје лакше или теже деформисати, и да ли се њена *запремина*, коју она такође у некоме телу има даје теже или лакше смањити или увећати, онда нам се сва пондерабилна материја у природи јавља у четири разна тако звана агрегатна стања. Та су стања: *чврсто*, *течно*, *гасно* и *етарско*.

96. **Чврсто стање.** У овом се стању материја доста знатно опире промени и облика и запремине. Због тога чврста тела имају извесан одређен облик и извесну одређену запремину и могу и једно и друго променити тек под утицајем јачих сила.

97. Ако дејством страних сила успемо да молекиле чврстих тела у неколико пореметимо, они се одмах у првашњи положај враћају чим тога странога дејства не-

стане. За таква се тела каже да су еластична, а та се особина материје назива *еластичност*. Ако је утицај са стране био судише јак, онда се поремећени молекили неће потпунце вратити у свој пређашњи положај и онда се каже да су молекили били напрегнути преко границе еластичности.

Сва су чврста тела еластична, само у разној мери. Код неких (олова, иловаче) еластичност је врло слаба, за то се и каже да су та тела нееластична. На против челик, каучук, слонова кост и т. д. врло су еластични.

98. **Течно стање.** У течном се стању материја са свим супротно понаша према деформацији облика и промени запремине. За деформацију су довољне и најмање силе тако да течности у обичним приликама немају самосталног облика (изузевши само случај кад су слободне). Чврста тела ваља подупрти само оздо па да остану на свом месту, течности на против треба подупрти и оздо и са страна, т. ј. треба их усути у суд па да се не растуре и не распу.

Док се течности дају врло лако деформисати, запремину своју врло тешко мењају и то само под врло јаким притисцима па и онда врло мало. Течности дакле имају сталну запремину, па стога се судови, у којима се течности налазе могу оставити отворени, течности из њих не ће нестати — бар док су у течном стању. Кад се течности изложе јаком притиску, оне се врло слабо сабију па се за то обично држи, да су течности нестишљиве. У осталом сабијене течности заузму одма своју пређашњу запремину чим притисак престане, па за то су оне потпуно *еластичне*.

Са тим различним понашањем течности према деформисању и промени запремине у тесној је вези и та особина течности, што се оне могу лакше делити но чврста тела, али се исто тако дају лакше и спајати; шта више, изгледа, да и кад се чврста тела привидно споје, да то бива тек пошто додирне површине њихове прођу кроз течно стање. (регелација, лемљење металних комада и т. д.).

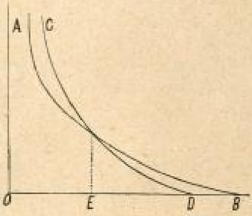
99. У течном стању материје, молекили врло лако клизе један по другом т. ј. теку. Због тога, пошто су течности на површини земљиној изложене привлачној снази земљиној, која јаче привлачи њихове молекиле но

што се она међу собом држе, због тога течности на површини земљиној немају самосталног облика него заузимљу облик суда у коме су. Само кад су течности са свим слободне и ван сваког утицаја са стране, само онда слаба привлачна снага течних молекила излази на видик и све течности без разлике заузму један исти сталан облик: куглу (капљице, Лајденфростов феномен, Платовљев покушај и т. д.).

100. **Гасно стање.** И гасови као и течности врло се слабо, да не речемо никако опиру деформисању па с тога ни они немају сталан облик већ заузимљу облик суда у коме су. Али у погледу промене запремине понашају се са свим супротно течностима. Смањивању се запремине у некој извесној али врло слабој мери опиру, и ни из далека онолико као течности. На против увећању запремине се не само не противе, него саме собом заузимљу сваки могући простор, који им се понуди. Због тога гасови немају сталну запремину као течности, и због тога их не треба затворити само оздо и са стране као течности, већ судови, у којима се гасови налазе морају бити затворени са свију страна. Због тога и кад извесну количину гаса затворимо у судове разне величине, сви ће ти судови бити испуњени гасом, само ће густина гасова у њима бити разна. Та особина гасова да заузму све већи простор зове се *експанзивност*. Обратно томе, може се једна количина гаса сабити у врло мали простор, па чим притисак престане, гас заузме своју пређашњу запремину. За то се каже да су гасови потпуно *еластична тела*.

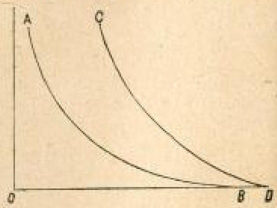
Поједина агрегатна стања материје нису оштро једно од другога одвојена а има и тела, која се не јављају само у једном већ врло често у сва три агрегатна стања. Таква је на пример вода, која може бити чврста као лед или гасовита као водена пара. И ако има доста тела, која могу заузети сва три агрегатна стања, ипак још нисмо успели да сва тела принудимо да буду и чврста и течна и гасовита. Међу тим, како са сваким даном расте број оних тела која могу заузети сва три агрегатна стања, то можемо закључити да ћемо пре или после успети (усавршавањем сретстава којима располажемо и открићем нових начина), да сва тела, кроз сва три стања проведемо.

101. Према ономе, што смо већ напред утврдили, да су сва тела састављена из молекила, ова разна агрегатна стања као што смо то већ узгред напоменули можемо објаснити само разним молекилским односима. И ако ћемо се доцније нарочито бавити проучавањем односа међу молекилима, ипак ћемо за сад толико рећи, да се сви молекили у некоме телу јаче или слабије међу собом провлаче и да је привлачна снага молекилска јака на врло малом растојању али да нагло опада са даљином



Сл. 37.

Због тога, што се разна тела притиснута, противе томе притиску, морамо закључити да међу молекилима има и извеснога одбијања, које растојањем јаче опада од привлачења. У обичном стању, обе те силе држе једна другој равнотежу; али кад два молекила станемо раздвајати онда превлађује привлачење које се раздвајању противи, а кад та два молекила један другом приближујемо, преовладаће одбијање које се том приближавању противи. На сл. 37 обе су те силе предстељене кривим линијама *AB* (за привлачење) и *CD* (за одбијање). *OE* је природно остојање молекила; ту је привлачење једнако са одбијањем. Лево се издиже више линија одбијања а десно линија привлачења. Кад се молекили доведу на растојање *OB*. онда престаје свако дејство молекилских сила. Квантитативни односи, представљени на сл. 37, одговарају чврстом стању материје. На против сл. 38 представља гасно стање. Линија молекилскога привлачења AB, остала је иста, а линија одбијања преместила се у десно и то толико да се обе те линије више не пресецају. Ту дакле увек превлађује одбијање, при-



Сл. 38.

родно равнотежно стање не постоји него гас сваки могући простор испуњава.

У средини између чврстих и гасних тела налазе се течности. Прелаз из једнога стања у друго може се тако разумети, кад се узме да привлачна линија услед загревања остане непомична а да се одбојна линија помиче са загревањем у десно. (Ауербах).

102. Што нарочито пада у очи кад се од чврстих тела пређе течностима, то је велика покретљивост њихових молекила. Та се пак покретљивост течних молекила може само тако сложити са иначе слабим молекилским привлачењем, ако се течни молекил свакога тренутка отме из привлачне сфере једнога молекила па одма мало даље западне у привлачну сферу другога молекила. Према томе кретање молекила течности је час прогресивно час треперење (Рајс). Али ако се молекилима течности да и прогресивно и треперење кретање, онда се тешко могу растумачити остала два агрегатна стања. С тога је много простије замислити да је кретање молекила течности тако, да путања свакога од њих изгледа таласаста. У том се случају много лакше даје објаснити и схватити прелаз материје из једног агрегатног стања у друго и то на овај начин:

Молекили чврстих тела *трепере* око свог равнотежног положаја, било у једној истој било у разним равнима, али све те равни пролазе кроз сами равнотежни положај молекила. Стабилношћу, коју свака таква раван мора имати, може се објаснити оно јако опирање спољашњим силама при вучењу или при притискивању чврстих тела, јер се зна да свако тело, које се у извесној равни а са извесном брзином креће, тежи да ту своју раван одржи. Кад је чврсто тело на температури, која је далеко од тачке топљења сваки његов молекил трепери са извесном одређеном амплитудом око свог равнотежног положаја, али тако, да су судари међу молекилима или никакви или врло ретки. С растењем температуре и приближавањем тачки топљења, амплитуда молекилскога треперења очевидно расте услед чега, молекили све чешће западају у сверу привлачења околних молекила и с њима се сударају. Резултат тога сударања је избијање појединих молекила из равни треперења; услед тога молекили, заошијани својим кретањем, напуштају свој равнотежни положај и трепере око других молекила мењајући непрестано своје место међу њима. Молекил нема више оне стабилности, коју је имао док је треперио око свог равнотежног положаја и за то га најмања страна сила може скренути на другу страну. С тога ни тело није више чврсто; оно је течно.

Због тога, што молекили течности свакога тренутка мењају своја места кроз систем молекила у коме су, њихове путање су сада у опште *таласасте* па било да су *равне таласасте* (ако су молекили у чврстом стању, треперили по правим линијама пролазећи кроз свој равнотежни положај), било да су *завојне* (ако су молекили у чврстом стању треперили по круговима, којих је средиште био равнотежни положај молекила), као што ће по свој прилици и бити. Другим речима, у чврстом стању амплитуда има извесну коначну вредност а таласка је дужина равна нули или врло мало различна од нуле. Код течности се поред амплитуде појави и таласка дужина најпре мала, па онда све већа у колико је, растењем температуре кретање молекила све брже. Растењем брзине и све већим заоштријавањем молекила, спирална се (или равна таласаста) путања све више развија и исправља, и због тога таласка дужина у толико више расте у колико се течност више приближује гасовитом или боље рећи парном стању. Кад течност пређе у пару, амплитуда је молекилске таласке путање врло мала према његовој талаској дужини али се још не може занемарити. На послетку код гаса амплитуда ишчезава према талаској дужини и молекил се креће у главноме прогресивно (и ако и друга кретања нису искључена) а путања му тежи правој линији, коју у том стању никад не може постићи.

103. **Етарско стање.** Агрегатна стања: чврсто, течно и гасно налазимо код материје, коју нашим чулима било посредно било непосредно можемо констатовати, код материје која дакле на наша чула може утицати, код тако зване чулне или пондерабилне материје. Али говорећи о материји и кретању у опште, видели смо да имамо још једну врсту материје, која на наша чула не утиче и која се тога ради назива импондерабилна материја; то је етар. С тога пре него што завршимо овај

одељак о агрегатним стањима морамо дати одређено место и етру у погледу агрегатности.

Највише се можемо приближити претставци о етру кад општим погледом упоредимо већ поменута три агрегатна стања. Свако се то стање врло много разликује од осталих. И у колико се, пошав од првог тог стања приближујемо последњем, у толико је све мање разноликости међу разним врстама материје; у толико је све мањи број оних особености, које једну врсту материје одвајају од других. Јер кад чврста тела пређу у течност, нестане оних нианса тврдоће, нема видљивих разлика између колоида и кристалоида, разнолике боје и разни ступњи непровидности замењени су често врло слабо обојеном провидношћу; безбројни геометријски облици чврстих тела замењени су код слободних течности једним јединим обликом: куглом.

Кад течности пређу у гасовито стање, још је мање разноликости између појединих врста материје. Огромне разлике у тежинама, које су постојале у чврстом стању и које су се готово непромењене задржале и код течности сада су са свим ишчезле. И оних слабих трагова боја, који су се још били задржали код течности, нестало је. У гасовитом су стању готово сва тела или безбојна или врло мало обојена али савршено еластична и све оне разлике између густине, тврдоће, провидности, боје, еластичности и геометријских облика, које су готово до безбројности довеле врсте чврстих и течних тела, збрисане су и сведене на врло слабе промене у тежини и једва приметне нијансе у боји.

Ако се сад од обичног гасног стања исто толико а може бити и два и више пута толико удалимо, колико смо се удалили били од чврстог до течног, или од течног до гасовитог стања, онда ћемо тек и то само у мислима моћи приближно схватити ово, за сада немерљиво, импондерабилно стање материје, етарско стање или етар. Да ли ће у том етарском стању, поједине врсте материје — разумевајући то у садашњем хемијском смислу — задржати и даље своје различне особине, другим речима, да ли ћемо у етарском стању имати исто толико врста материје колико имамо сада хемијских елемената или много мање, то је питање које се нас овде не тиче и које нам није ни од какве користи ни потребе. Важно је за нас да знамо, да је такво, импондерабилно стање материје могуће, и да имамо известан број појава, које нас немилице на тај закључак гоне.

Говорећи мало час о кретању гасних молекила видели смо, да се они крећу по таласким путањама врло великих таласких дужина (према амплитудама) које теже правој линији а коју не могу никад постићи. По свој прилици молекили материје постижу ту праву линију у етарском стању.

104. Не треба мислити, да се то импондерабилно стање материје или етар налази негде засебно, одвојено и ван обичне, мерљиве материје, ван сада познатих чврстих, течних и гасовитих тела. На против, као што смо и раније напоменули, ваља етар разумети тако, да он у васељени испуњава цео простор неиспуњен пондерабилном материјом, па биле то празнине или шупљине или поре у самим чврстим течним или гасовитим телима, били то међупростори између појединих планета једнога сунчаног система, било то просторије између појединих сунаца или звезда. Сама нас факта гоне да мислимо, да је целокупни простор испуњен етром, и да у њему овде онде налазимо веће или мање комаде чврсте, течне или гасовите материје, прожмане у свој својој маси етром, од прилике онако, као што би комад сунђера лебдио у води испуњен њоме у свима својим шупљикама или као комад порозног угљена у ваздуху, који као што знамо продире у све међупросторе његове.

105. Оне исте појаве, које су нас принудиле на хипотезу о етру, дале су нам извесних знакова по којима можемо судити о природи и конституцији његовој. Тако се дошло до закључка да етар није каква непрекидна маса, него да је састављен из делића који су на извесној даљини један од другога. Даље, тежина етарских молекила може се, код свију оптичких појава занемарити према осталим молекилским снагама, те се етар у том погледу може сматрати као да је без тежине. Етар је на послетку потпуно еластичан услед чега може да трепери.

Густина и еластичност етра није у свима телима једнака, па шта више није ни у једном истом телу увек у свима правцима иста. Количник из еластичности и густине етра, зове се *специфичка еластичност* и мери се квадратом брзине, којом се простиру таласања у оном правцу у коме се еластичност и густина посматра. Тако на пример код извесних кристала, специфична еластичност није у свима правцима иста услед чега ти кристали двогубо преламају светлост.

Према томе ми видимо да има много појава, које нам дозвољавају, да на неки начин прецизирамо тај особити елеменат о коме је говор. Ми ћемо дакле рећи да је етар флуидум особите финоће и суптилности, неосетљив ни за какво наше чуло, немерљив ни за какву нашу справу али који испуњава цео бескрајни простор и који у самој ствари представља садржину тога простора. Етар је невидљива и немерљива веза, која целокупну видљиву и мерљиву материју у васељени везује и спаја у једну природну целину. Будући у непосредном и непрестаном додиру са мерљивом материјом, он својом покретљивошћу служи као главно средство за пренос кретања са једног дела мерљиве материје до другог. У таком схватању улоге коју етар игра у данашњој науци, лежи кључ тумачењу многих природних појава.

106. *Напомене:* 1. Услед велике покретљивости молекила течне, гасовите и етарске материје, оне се називају општим именом *флуиди*, — течности у ширем смислу речи. У том се случају за обичне течности каже да су *капљичаво течна* тела.

2. Као што ћемо видети у науци о топлоти, сва разлика између агрегатних стања пондерабилне материје долази од температуре и притиска. Вода прелази из једног стања у друго само променом температуре. Угљена се киселина (CO_2) на обичној температури може претворити у течност само јаким притиском. Али свакако промена агрегатног стања врши се најлакше променом притиска и температуре у исти мах.

3. Има тела, која чине прелаз између појединих агрегатних стања. На пример густе течности (катран, мед,) теста и пихтијаста тела, стоје између течности и чврстих тела. Између течности и правих гасова стоје паре, које тек кад су далеко од своје кондензационе тачке постају гасови. Магла је скуп ситних водених куглица или мехурића, који лебде у ваздуху; то вреди и за облаке. Дим

постаје кад чврсти и лаки делићи (угљена, арсеника, сумпора, цинка и т. д.) лебде по ваздуху. Прелаз између гасовитог и етарског стања чинило би у неколико, „радијално стање“ Круксово. (Crookes).

4. Кад се разна тела саставе у ново тело, обично настуна промена агрегатног стања једнога или обадва; но кад што агрегатно стање новога тела остаје исто, само се онда промени запремина. Том се приликом могу ови главни случајеви разликовати:

a. *Чврсто тело* постаје:

1) из два гаса (амонијак и хлороводонична киселина дају нишадор).

2) из једнога гаса и течности (оксид живе постаје од живе и кисеоника).

3) из једног гаса и једног чврстог тела (сва кисеонична једињења метала).

4) из две течности (бромид живе).

5) из једне течности и једног чврстог тела (многи тако звани хидрати, на пр. гипс).

6) из два или више чврстих тела (металне легуре).

b. *течност* постаје

1) из два гаса (вода).

2) из једног гаса и једне течности (апсорција гасова у течностима).

3) из једног гаса и једног чврстог тела (образовање течних хлорних метала).

4) из две течности (мешање разних течности).

5) из једне течности и једног чврстог тела (растварање соли).

6) из два чврста тела (сумпорни угљеник).

c. *Гас* постаје

1) из два гаса (мешањем или једињењем на пример хлора или водоника).

2) из једног гаса и једне течности (бром и водоник).

3) из једног гаса и једног чврстог тела (угљен и кисеоник).

VI. ПОКРЕТЉИВОСТ

107. Говорећи о дељивости материје видели смо, да је сва материја у природи састављена из молекила а ови опет из атома. Говорећи о агрегатним стањима метерије

видели смо да разлика појединих агрегатних стања долази од начина, како се молекили (а с њима и атоми) крећу, али да се у свим стањима без разлике молекили непрестано крећу. И према томе, пошто у целој природи нема ни једног молекила (па дакле ни атома) који се не би кретао, (па ма какво агрегатно стање његово било) то излази да је целокупна материја покретна и да је покретљивост једна општа особина материје.

За један део материје кажемо да се *креће* кад он мења своје место у простору. Ако нам по који пут изгледа, да по неки део материје на пр. неко тело своје место не мења, онда се каже да је то тело у *миру*.

Да ли се једно тело креће или не, дознајемо тек кад га упоредимо са другим околним телима. Кад ходамо, јашемо или се возамо, онда упоређујемо наше кретање према путу, дрвима, кућама и т. д.; ако смо на лађи онда дознајемо да се лађа креће, кад је упоредимо с обалом. Ако тих предмета за упоређивање нема, онда се држи да је тело мирно. Седећи у лађи која се креће и у којој су прозори покривени завесама да се обала не види, мисли се, да лађа не путује, пошто сви околни предмети у лађи задржавају исте положаје. Исто то бива кад се возимо у затвореним железничким колима.

Кад је онај предмет према коме ми неко кретање упоређујемо сасвим миран, онда се каже да је то кретање *апсолутно*. У обичном се животу кретање тако и замишља. Али пошто у целој природи нема ни једног тела, које би било апсолутно мирно (21) то се по себи разуме да ни у целој природи нема нигде апсолутног кретања.

Кад се онај предмет, према коме ми неко кретање упоређујемо, и сам креће, (као што је то увек случај у природи) онда се тако кретање зове *релативно*. Кад у у лађи ходамо, ми своје кретање упоређујемо према стубовима или столовима у лађи, који се при том такође крећу јер лађа путује. Ми смо онда у релативном кретању према лађи, Па баш кад лађа и не би путовала, ипак би наше кретање по њој било релативно, јер је лађа на површини земљиној а земља се окреће око сунца. Земљино окретање упоређујемо према сунцу, па ни оно није апсолутно јер ни сунце није мирно него се креће по васиони. Ни кретање сунца није апсолутно, јер га упоређујемо према звездама, а данас се зна да нема ни једне звезде која се не би кретала. *Сва су дакле кретања у природи релативна.*

Исто тако ако нам се неко тело учини мирно, оно је само у релативном миру. Ходајући поред кућа, нама куће изгледају мирне али су оне само у релативном миру, јер се оне заједно са земљом окрећу око сунца. Из тога излази *да у природи нема апсолутног мировања.*

Кад се брзо возимо на лађи или на железници, па кроз прозор погледамо на околне предмете (дрво, куће и т. д.) ми их видимо како поред нас промичу т. ј. нама се чини да се ти предмети крећу а да ми стојимо. Такво се кретање зове *привидно.* Из истога је разлога и дневно кретање сунца и звезда на небу привидно јер у самој ствари земља се окреће око своје осе а сунце и звезде су у релативном миру према земљи.

ДЕО ТРЕЋИ

КРЕТАЊЕ, ОПШТЕ ОСОБИНЕ И ВРСТЕ КРЕТАЊА

108. До год говоримо о кретању у опште, замислићемо да се креће једна тешка тачка без димензија и нећемо за сад водити рачуна ни о њеној маси ни о узроцима, који су то кретање изазвали. Па и кад говоримо о кретању тела, сматраћемо кретање само једне његове тачке у коју ћемо замислити да је цела маса тела концентрисана. Другим речима посматраћемо кретања са чисто геометријског гледишта. Онај део науке, који се бави таквим изучавањем кретања зове се *кинематика* или *фороно̄мија*. Ми ћемо у кратко изложити само један део кинематике.

I. ВРЕМЕ

109. Видели смо, да се једно тело онда креће, кад своје место у простору мења. Али док тело из једног свог положаја дође у други, мора да прође неко извесно трајање и то се трајање зове *време*. Време је дакле само последица кретања јер само услед кретања дознајемо да је морало протећи неко време, док је тело прешло из једног положаја у други. Да нема кретања не би било ни појма о времену, и за то је време једна општа особина кретања. Време се мери трајањем некога кретања.

Између разних кретања, која опажамо у природи, за мерење времена служи кретање наше земље, како око себе, тако и око сунца. И ако се рачуном нашло да је од 720 године пре Христа па до данас, дужина дана порасла за $\frac{1}{2,700.000}$ свој део (т. ј. са 0·032 једне секунде), ипак се обртање земљино око осе у току једне хиљаде година може сматрати као потпуно једнако, и узети за основицу тачнога мерења времена.

За мерење краћих трајања служи трајање једног пуног обрта земљиног око своје осе и то се трајање зове *дан*. А за мерење дужих трајања, служи трајање земљиног окретања око сунца и то се трајање зове *година*. Један дан се дели на 24 једнаких *сати*, сат на 60 једнаких *минута* а минут на 60 једнаких *секунада*. Време од 100 година назива се *век*.

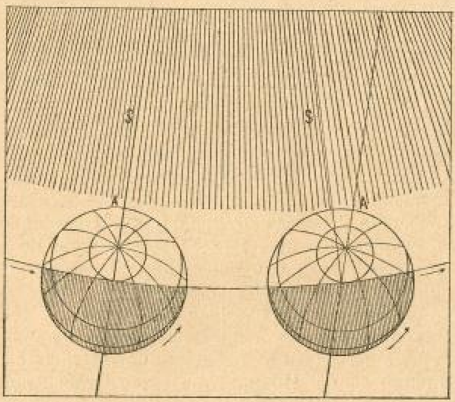
110. **Звездани дан.** — *Услед* обртања земљиног око себе, лако је опазити како поједине звезде, па и сунце мењају своје положаје у простору. То мењање положаја бива тако, да после извесног времена (т. ј. после 24 сата) све звезде заузму исте полажаје као и пре тога; и оно време које протече, док једна иста звезда заузме два пут једно за другим исти положај у простору зове се *звездани дан*. Звездани дан служи у астрономији, као основна и непромењива јединица времена; јер услед потпуно једнаког обртања земљиног, протече увек једно исто време док једна звезда дође у онај исти положај који је имала дан раније. Звездани дан подељен је на 24 једнаких звезданих сати, сат на 60 једнаких звезданих митута а минут на 60 једнаких звезданих секунада.

У место једне извесне звезде, астрономи се служе за мерење звезданог времена привидним кретањем само једне замишљене тачке на небу. То је једна од оних двеју тачака, где земљина путања (еклиптика) сече небески екватор, и то пролећна равнодневичка тачка. Кад та тачка заузме највиши положај на небу, кад дакле кулминира т. ј. кад пролази кроз меридијан некога места, онда је на том месту 0 звезданих сати, 0 звезданих минута и 0 звезданих секунада тога дана.

111. **Сунчани дан.** Као год све звезде, тако и сунце привидно мења свакодневно своје положаје на небу услед обртања земљиног око осе, те с тога и то привидно кретање сунца служи за мерење времена, онако исто као и кретање звезда. Између разних положаја сунчевих на небу, најзгоднији је за мерење времена онај, кад сунце достигне највиши положај на небу, кад кул-

минира т. ј. кад пролази кроз меридијан тога места, (а то бива свакога дана у подне). И оно време које протече између два узастопна пролаза сунчева или боље рећи сунчевог средишта кроз меридијан, зове се *сунчани дан* који се такође дели на 24 сунчаних сати, сат на 60 сунчаних минута а минут на 60 сунчаних секунада.

112. Сунчани и звездани дан (па дакле и њихови сати, минуте и секунде) нису једнаке дужине. Јер док се земља једанпут обрне око своје осе, она у исти мах пређе и један део $\left(\frac{1}{365}\right)$ своје годишње путање око сунца. Према огромној даљини звезда, то премештање земље око сунца потпуно ишчезава, али према даљини сунца



Сл. 39.

од земље, о њему се мора водити рачун. Јер услед тога, прође мало више времена док сунце, за неко извесно место на земљи достигне своју највишу тачку на небу, но што би то било кад се земља не би помицала. За то је сунчани дан за 235·909 секунада или за 3 м. 55·909 сек. дужи од звезданог. Сунчани дан у звезданом времену износи 24 с. 3 м. 56·55 сек.

Разлику између звезданог и сунчаног дана лако ћемо схватити посматрањем сл. 39. на којој је представљен један део земљине путање по којој се земља окреће око сунца, од кога долазе зраци S. S. Услед обртања земљиног око осе с десна на лево, неко извесно место на земљи A, налази се у подне једнога дана испред сунца (положај I) т ј. онда му сунце пролази кроз меридијан. Сутра дан, кад се земља буде обрнула један пут око себе, она ће се помаћи по својој путањи и доћи у положај II. Али услед тога помицања A није још испред сунца, т. ј. њему још није подне, ма да је се земља потпуно око себе обрнула (јер су обе линије које пролазе кроз A паралелне) него мора да протече још неко извесно време, док A дође у правац зрака S те да се доврши један сунчани дан. И за то, што A мора да дође испред S (у положају II) па да се наврши један сунчани дан, за то је звездани дан (који се наврши кад посматрано место дође у A пошто помицање земљино према даљини звезда исчезава), краћи од сунчаног скоро за 4 минута.

113. Пошто се земља не окреће око сунца преко целе године једнаком брзином, то земља не прелази свакога дана једнаке делове своје путање, па за то ни сви сунчани дани нису једнако дугачки, т. ј. разлика између сунчаног и звезданог дана није стална (пошто се дужина звезданих дана преко целе године никако не мења). За то се за грађанско рачунање времена замишља једно *средње сунце* (за разлику од *правог сунца*), које се по целој путањи привидно креће једнаком брзином. И време које се добија кретањем тог средњег сунца зове се *средње сунчано време* за разлику од оног првог које се зове *право сунчано време*. Према томе један *средњи сунчани дан* биће време које протече између две узастопне кулминације *средњега сунца*. Разлика, која постоји између правог и средњег сунчаног времена зове се *времена једначина*. Право и средње време стоје у овом односу према временој једначини:

Средње време = правом времену + временој једначини.
Право време = средњем времену — временој једначини.
Времена једначина = средњем времену — правом времену.

У обичном животу као и у свима наукама, (осим астрономије) време се рачуна по средњем сунчаном времену. За астрономско рачунање узето је звездано време. Грађански дан почиње у поноћ а сати се броје два пут по дванајест сати. Астрономски дан почиње у подне и сати се броје од 1 до 24 непрекидно.

114. **Година.** — У грађанском животу се дужа трајања мере са малим изузетком код свију народа по *тропској сунчаној години*, а то је време које прође док земља један пут око сунца обиђе т. ј. време које протече између две узастопне и једноимене равнодневнице (на пример између две узастопне пролећне или између две узастопне јесење равнодневнице, или још између два узастопна најдужа или најкраћа дана). Као почетак године рачуна се онај тренутак кад сунчев центар привидно прође с југа на север кроз пролећну равнодневничну тачку.

Услед привлачења сунчевог на екваторску испупченост земљину, та тачка није стална у простору него се натрашке помиче сваке године око 50·2 лучних секунада. То измицање равнодневничне тачке па дакле и дужина тропске године није стална него је час већа час мања и може нарасти до на 38 времених секунада.

Да се не би за сваку годину посебице водио рачун о њеном трајању, израчуната је из врло дугог низа тропских година једна *средња тропска година* и њена општа вредност износи:

365 дана 5 сати 48 мин. и 44·6 секунде средњега времена.

Средње пак трајање тропске године за овај век износи:

365 дана 5 с. 48 мин. и 48 сек.

Средња се тропска година мења у току једнога века за

0·6 секунде.

115. Година, којом се у обичном животу служимо, т. ј. обична календарска година је тропска година. Године 45 пре Хр. Јулије Цезар на предлог астронома Сосигена заокруглио је трајање године на 365 дана и 6 сах. па је за то уредио да три узастопне тако зване *просте* године имају по 365 дана а да свака четврта година буде преступна и да има 366 дана. Тако је

постао Јулијев календар, који код нас још и данас вреди. Латинска црква предузела је била да поправи календар, јер је трајање године по Јулијевом календару узето за 11 минута и неколико секунада дуже но што је у ствари и Папа Гргур XIII стави у дужност Алојзију Лили-у да поправи календар, који би уведен 1582 год на тај начин што је 5 Октобар те године рачунат као 15-ти Октобар. Тако је нови календар био поправљен за 10 дана. По томе, Гргуровом календару, остала је као и у Јулијевом, свака четврта година преступна, али да се поменута погрешка не би више понављала, оне секуларне године, чије се целе стотине не могу поделити са 4 без остатка остају просте. Тако је 1600 година била преступна, а 1700, 1800 није, нити ће бити 1900; тек ће 2000 година бити преступна. Тиме је она погрешка, која за 128 година износи један дан у толико поправљена, да ће она тек после 3300 година изнети један цео дан.

Почетак је године стављан у најразличније доба пре но што је усвојен 1 Јануар. Тропска се година дели на 12 месеци, од којих једни имају 31 дан (јануар, март, мај, јули, август, октобар и децембар), једни 30 дана (април, јуни, септембар и новембар) а фебруар 28 или 29 како је кад година проста или преступна. У последње време прави се разлика у писању времена. Ако се записује *тренутак* кад се што десило, онда се сати, мин. и сек. бележе поред цифара *горе*, а ако се хоће да запише *трајање*, онда се сати, мин. и сек. бележе поред цифара *доле*. На пример један се догађај десио некога дана у $3^{с.}\ 25^{м.}\ 42^{сек.}$ и трајао је 3 с. 25 м. 42 сек.

116. Кад се трајање окретања земљиног не одређује према сунцу, него према звездама, онда се таква година зове звездана или *сидерска*. Сидерска средња година има 365·25637 средњих дана или

365 дана 6 с., 9 м. 10·7 сек.

Тачно мерење времена.

117. Сахат. — Као год што смо описали начине којима се долази до што тачније одредбе дужинских и угловних величина, исто тако ћемо у кратко напоменути начине тачнога мерења времена као и погрешке, које обично та мерења прате.

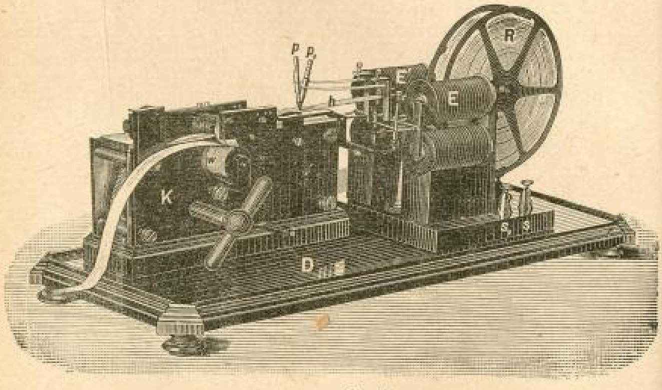
Најобичнија справа која у научним испитивањима служи за мерење времена јесте обичан дуварски *сахат* са шеталицом или клатном. Не упуштајући се у детаљнији опис конструкције једнога таквога сахата (о чему ће у неколико бити речи на другом месту) као ни у описивање услова, који се морају испунити да се дужина клатна код сахата са променом температуре знатно не мења ми ћемо да напоменемо, да се сахатови за тачна мерења времена у толико разликују од сасвим обичних домаћих сахатова те врсте, што су са много већом пажњом и савршенијом тачношћу изведени. Клатно код свију таких сахатова обично откуцава секунду, коју и нарочита казаљка својим премештањем показује. Врло често су како секундна тако исто и минутна па и сатна казаљка свака за себе и одвојено једна од друге намештене.

118. **Хронометар.** — Али такви стални дуварски сахатови, код којих је главни услов да добро раде не могу се употребити на научним путовањима као и при одређивању времена ван зграда у којима су намештени. Онда се служимо сахатовима друге врсте, код којих се регулисање времена не врши обичним клатном већ једним замајцем и који се због пажљивије израде и због нарочитог облика који им се даје, називају (за разлику од обичних сахатова) *хронометри.* Док код дуварских сахатова клатно одржава у клаћењу привлачна снага земљина, дотле се код хронометра та снага добија навијањем једне еластичне опруге (онако исто као и код џепних сахатова). Тачни хронометри да би правилно радили, захтевају да увек остану у хоризонталном положају, па с тога се они и утврђују на нарочити начин у својој кутији у којој заузимљу при свима покретима (помоћу Кардановог вешања) хоризонталан положај.

Кад је потребно да један сахат (или хронометар) покаже време на више места од један пут, или на некој извесној даљини од места на коме се он налази, онда се нарочитим додатком, његово показивање преноси електричним путем на већу или мању даљину. Том приликом се обично само избијање његове секунде или минуте преноси на даљину.

119. Хронограф. — Врло често је потребно, да се показивање времених величина запише и на тај начин упоређује са оним временом, које се одређује или мери. За то се служимо справама које се зову *хронографи* и који по себи не показују никакво време (т. ј. то нису сахатови који раде) већ се електричним путем споје са каквим сахатом, чије се време онда на хронографу записује.

Хронографи могу записивати време на једној пантљици од хартије, налик на ону употребљену у телеграфу; у том случају такви хронографи и личе на обичан Морзов телеграф. Сл. 40 представља један хронограф специјалне конструкције израђен у Физ. Инст. Вел. Шк. *E* и *E'* су

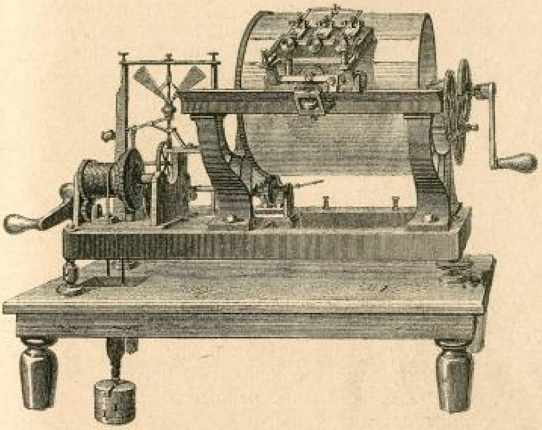


Сл. 40.

два електромагнета, који крећу две писаљке p и p_1 изнад хартије h која се одваја са точка R. Једна писаљка бележи секунде а другом располаже посматрач.

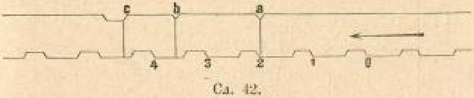
Више пута времени знаци на хронографу исписују се на огарављеном цилиндру и онда апарат изгледа као на сл. 41. Да се у овом последњем случају, знаци који се на једном месту на цилиндру испишу, не поклопе са другим знацима, који доцније дођу, обично се писаљке поред цилиндра а дуж једнога завртња премештају од прилике онако исто као оно нож код деобне машине.

Нарочити пак механизам окреће цилиндар или одвија хартију за писање; тај механизам или креће један већи тег као на сл. 41 или се у њему навија еластична опруга као код сахатова (помоћу кључа К сл. 40).



Сл. 41.

Сваки хронограф има најмање две писаљке; једна је спојена са сахатом и записује секунде а другом рукује посматрач и њоме бележи одмах поред првих, секундних знакова, времена својих посматрања. Како се ти знаци једни поред других исписују види се на сл. 42. Доња



Сл. 42.

испрелamaна линија својим цифрама 0, 1, 2, 3,... показује секунде које даје сахат; горња пак код a, b, c показује тренутке кад је посматрач видео оно што у опште посматра.

120. Било да се време приликом каквога посматрања непосредно на сахату или хронометру слуша, било да се на хронографу записује, сваком се тачном сахату или хронометру морају одредити извесне величине које га прате и то ове:

Сваки сахат ма како тачно он био направљен, онога тренутка кад се њиме служимо не показује право време већ или показује време веће или мање од правога. Ако је t право средње време, а ако је t' оно време које сахат у тренутку кад посматрамо показује, онда се разлика $t - t'$ назива „*стање*" једнога сахата. То дакле стање показује колико минута и секунди на нашем сахату има више или мање него што је право средње време.

Нема сахата ни хронометра који у своме раду или не иде напред или не заостаје. И ако сахат за 24 сата рецимо заостане за τ секунада онда се то τ назива „*ход*" тога сахата или хронометра.

Ако сахат показује мање време него што би требало, онда је његово стање одречно. Исто се тако његов ход узме са одречним знаком кад иде напред.

Ма како сахат напредовао или заостајао, та се мана његова на њему самом не исправља, него се само разлике између његовога показивања времена и правог средњег времена узму у рачун.

Рецимо да смо два дана узастопце посматрали у подне време на нашем сахату па смо првога дана нашли $11^{с.}\ 59^{м.}\ 30^{сек.}$ а другога $11^{с.}\ 59^{м.}\ 28^{сек.}$; онда је ход тога сахата био 0 с. 0 м. 2 сек. а његово стање другога дана у подне било је $- 0^{с.}\ 0^{м.}\ 32^{сек.}$.

Ако смо десет дана доцније опет одређивали време па на нашем сахату у подне прочитали $11^{с.}\ 50^{м.}\ 30^{сек.}$ онда је средње време:

$$= 11^{с.}\ 50^{м.}\ 30^{сек.} + 32^{сек.} + (2 \text{ сек.} \times 10) =$$
$$= 11^{с.}\ 51^{м.}\ 22^{сек.}$$

121. Да се приближно дозна ход једнога сахата а то је у највише случајева (изузевши астрономска посматрања) довољно, ваља поступити на овај начин: Једним дурбином који има кончаницу посматрамо ма коју звезду*) и то онда кад она од прилике пролази кроз меридијан, па тачно

*) Звезде које су ближе екватору пролазе брже а оне што су ближе полу спорије кроз поље дурбина.

забележимо тренутак кад је звезда кроз кончаницу прошла. Сад оставимо дурбин на истом месту до сутра дан у исто време, па поново забележимо тренутак кад та иста звезда кроз кончаницу прође. Време између оба пролаза звезде кроз кончаницу јесте један звездани дан који има 86164 секунду средњег сунчаног времена. Кад од овога броја одузмемо оне секунде које смо за то исто време на нашем сахату прочитали, добићемо ход тога сахата са својим знаком.

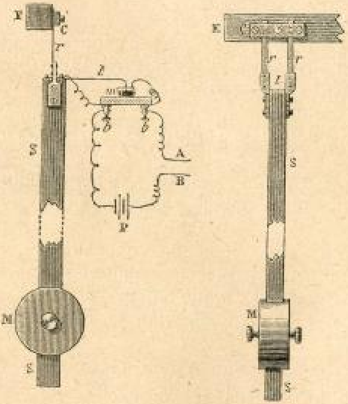
Кад знамо ход једнога сахата за свих 24 сата, онда нам је лако, простом сразмером наћи његов ход и за свако друго дуже или краће време, предпостављајући очевидно, да је његов ход за све то време био сталан и непроменљив.

122. Хроноскоп. — Помоћу сахатова и хронометара у вези са хронографима одређиваћемо на описани начин времена која дуже трају. Остаје нам још, да са неколико речи опишемо начине за одређивање врло кратких времена на пример стотините или хиљадите делове једне секунде.

За мерење тако кратких трајања више пута није потребан никакав прави сахат, већ је довољно само једно клатно које ће радити само неко кратко време али кога смо време клаћења одредили упоређењем са каквим тачним сахатом или хронометром. Такво једно клатно као и друге сличне справе, које раде само с времена на време и онда кад нам је то потребно, зову се *хроноскопи*.

Клатно направљено од метала има ту незгоду што се на разним температурама разно истеже а тиме се трајање његовога клаћења час више час мање мења. Да би се та промена у дужини клатна услед температуре избегла, праве се тако звана *компанзована* клатна, али се ми код њих на овом месту нећемо задржавати. Најболе би клатно могли направити од обичног али сасвим сувог дрвета (на пр. чамовог) кад би само обратили пажњу да му конци нису искривљени. Такво дрво превучено слојем лака који ће сметати влаги да се у дрво упије, може се сматрати да је на температури непроменљиво, јер његово истезање у правцу конаца, износи само три милионта дела његове дужине.

Такво једно клатно од дрвета, употребљено на париској Сорбони у лабораторији за физичка испитивања представљено је на сл. 43. Дрвена шипка S S горњим својим крајем утврђена је за две челичне опруге r r уковане у гредицу E а на доњем делу носи тешку металну масу M, која се нарочитим завртњем може на већој или мањој висини утврдити те тиме регулисати време једнога клаћења клатна. Лева слика представља то клатно с преда а десна са стране. На левој слици, види се на горњем крају утврђена бакарна шипка *t* која се (кад клатно на леву или десну страну клати) спушта и подиже те се тако при сваком клаћењу клатна замочи у судић *m* напуњен до некле живом. На тај начин, кла-



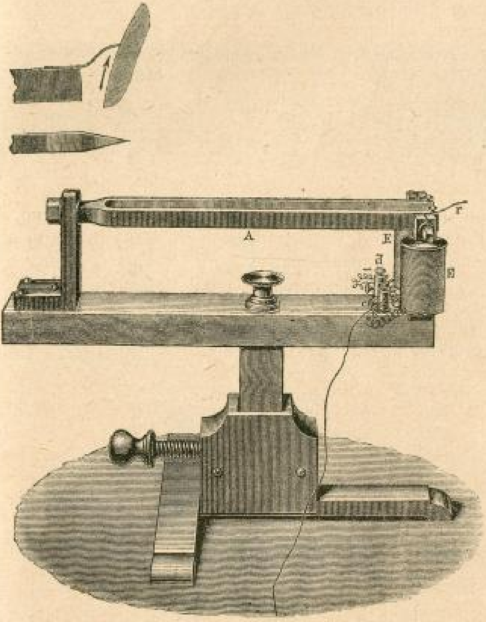
Сл. 43.

ћењем клатна па дакле и оне бакарне шипке спаја се електрична струја, која се онда одводи жицама у хронографе или на другу страну где то буде потребно.

Такво клатно може, остављено самом себи да клати више сати те може да служи и за експерименте који дуже трају.

123. Да би трајање једне секунде, коју добијамо било помоћу хроноскопа или на други који начин, по-

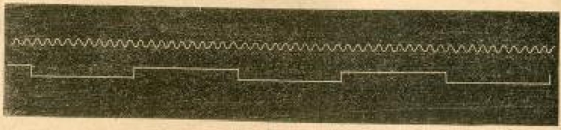
делили на мање делове, служимо се *звучном виљушком* или *дијапазоном*. Дијапазон је челична еластична шипка савијена те изгледа као двокрака виљушка и може врло правилно и брзо да трепери, дајући при томе тон извесне висине. Ако је температура стална, онда је број треперења такве виљушке у једној секунди сталан те



Сл. 44.

дакле и висина тона њенога стална. Такве се виљушке могу лако направити да затрепере 500 или 1000 пута у секунди; сваки дакле такав трептај траје $\frac{1}{500}$ или $\frac{1}{1000}$ део једне секунде. Ако на један крак звучне виљушке утврдимо какву лаку писаљку па је приближимо каквом нагарављеном цилиндру (на пр. од хронографа) који се брзо окреће, онда ће се треперења виљушке исписати на цилиндру у облику ситних правилних таласа.

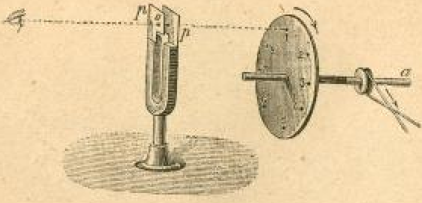
Пошто се звучне виљушке једном заталасане брзо умире то оне не би могле послужити за експерименте који мало дуже трају да се није доскочило тој незгоди тиме, што се нарочитим додатком може треперење ви-



Сл. 45.

љушке помоћу електричне струје одржати онолико дуго, колико се хоће (сл. 44). Ваља само с времена на време испитати (сравњивањем са каквим тачним сахатом) да ли се број треперења виљушке у след електро-магнетскога дејства није и у колико изменио.

На сл. 45 види се таласаста линија коју описује писаљка на дијапазону а поред ње забележени они де-



Сл. 46.

лови времена који се посматрају и који се поред тих таласа могу лако по својој дужини сасвим тачно одредити.

124. Звучна се виљушка или дијапазон може још на један начин употребити за одређивање врло кратких времена или врло великих брзина код тела која се врло брзо крећу или окрећу. Горња употреба виљушке била је *графичка;* ова сада назива се *стробоскопска.*

Рецимо да смо ради да одредимо брзину обртања неке осовине а сл. 46, која се врло брзо окреће. Тога ради утврдићемо на тој осовини један бели котур, који близу обода свога носи неколико црних тачака или црта подједнако удаљених између себе; овде их на слици има осам обележених цифрама од 1 до 8.

Испред тога котура наместићемо један дијапазон, који на сваком свом краку носи по једну плочицу p пробушену код o. Кад је дијапазон миран (т. j. кад не трепери) онда се кроз обе рупе види на котуру тачка 1; али чим он зазвучи, око ће видети тачку 1, само у оном тренутку кад оба отвора прођу један испред другога, онако како су били кад виљушка није звучала.

Тако је ствар стајала кад је дијапазон звучао али се котур није обртао. Учинимо сада, да се котур врло брзо окреће у правцу који показује стрелица. Нека та брзина окретања котура буде толика, да док оба она отвора два пут узастопце стану један испред другога те пропусте светлост, да се дотле котур помакне за једну осмину свога обима, другим речима, да за то кратко време дође број 8 на место броја 1. Док је котур био миран, око је видело тачку 1, а сада при поменутој брзини оно види тачку 8 на оном месту где је мало час била тачка 1; па како се то дешава врло брзо то оку изгледа као да се котур и не помиче с места. То ће наступити и онда кад се котур још брже окреће те у место тачке 1 дође на исто место тачка 7 или 6; дакле увек онда, кад се за оно кратко време, које протече док отвори на дијапазону стану један испред другога, котур окрене за ону величину колико управо износи растојање између две или три и т. д. његове тачке.

Рецимо да се котур мало брже окреће него до сад; тачка 8 неће се видити у средини отвора него мало у десно. Оку ће се чинити као да се оне тачке на котуру премештају полако оним истим правцем, којим се и котур окреће; брзина тога премештања биће равна разлици између праве брзине којом се котур заиста окреће и брзине са којом отвори стају један испред другога. Премештање тачака биће у назад ако је брзина котура мало мања од брзине трептања дијапазона. Ова стробоскопска метода употребљена у овом или у неколико измењеном распореду најтачнија је и најзгоднија за све оне случајеве кад имамо посла са врло великим брзинама или другим речима са врло кратким временима.

II. ПОСТОЈАНОСТ (ИНЕРЦИЈА).

125. Свако кретање, па ма какво оно било може да се промени, али само онда, кад ту промену какав други утицај произведе. Јер се дугим низом посматрања дознало, да свако кретање тежи да остане постојано, т. ј. оно се само собом не може променити, и та општа особина свију кретања зове се *постојаност* или *инерција (лењивост).* *) Према томе, ако је неки део материје, т. ј. једно тело у релативном миру, оно се не може само собом кренути све дотле, док га друго неко тело не покрене. С друге стране, тело једном покренуто не може се само собом зауставити све док опет неко супротно кретање са стране, његово кретање не потре и тело не заустави,

Кад се једно тело креће а на њега не утиче никакво друго кретање са стране, онда се оно мора кретати и потпуно једнако и по правој линији. Јер то кретање остављено самом себи, не може да скрене ни лево ни десно те дакле мора продужити своје кретање по правој линији. Исто тако се то тело не може само собом кретати ни брже ни спорије него увек једном истом брзином па с тога и кретање мора бити једнако, Према томе закон о постојаности кретања може се овако изрећи:

Кад никакав стран утицај не утиче на неко тело што се креће, оно ће се кретати по правој линији и са једнаком брзином.

(И тела, која су у релативном миру обухваћена су овим законом јер је њихова брзина равна нули).

126. За тела, која су у релативном миру закон о постојаности врло је прост, јер се врло лако увиђа, да мирном телу треба ма какав утицај са стране те да га крене. Нарочито пада у очи тај закон, кад страни утицај дејствује само на један део тела; јер се онда тај део одма крене а други делови остану и даље у миру, пошто се то страно дејство не преноси тренутно на све делове тела, него му треба неко извесно и ако често врло кратко

*) Постојаност или инерција назива се још и *Галилеов принцип.*

време, па да са једног дела тела пређе на друге. Кад седимо на пример у мирним колима или чуну, па се кола напрасно крену напред, онда доњи део тела, који је у вези са чуном и колима пође истим правцем а горњи део, до кога се кретање још није пренело остаје на своме месту, т. ј. привидно се тргне натраг. — Ако се над отвором једне флаше налази једна карта и на њој какав новац, па карту напрасно извучемо или одгурнемо, новац ће пасти у флашу, јер се карта тако брзо измакла да се њено кретање није имало кад саопштити новцу. — Из истог се разлога проспе вода из чиније или чаше кад је нагло помакнемо у страну. — Кад пуцамо у прозор, тане ће направити у стаклету округао пролаз и стакло се неће разбити у комаде што би се десило, кад са мањом брзином ударимо било танетом или каменом у прозор. — Исто тако пуцајући у даску, која се врло лабаво држи усправљена и коју би најмањим додиром могли претурити, тане ће пројурити кроз њу а даска неће пасти. — Експлозивне бризантне материје, које сувише нагло експлодирају, као динамит, мелинит, планкастит и т. д. не могу се употребити за оружје, јер ће целом масом пре експлодирати но што ће своје кретање пренети на тане у оружју, а услед тога оружје ће се разбити. — Конац који може лако да подигне терет, кад га полако издижемо, искидаће се кад нагло конац и терет повучемо. Из истог разлога покидају се запреге на колима кад коњи, или нагло пођу, или кад каква препрека кола нагло заустави.

127. Па и код тела која се крећу, има врло много примера из обичног живота, којима се огледа закон постојаности каретања. Кад се чун или кола који се са извесном брзином крећу нагло зауставе, онда горњи део део тела пада напред. — Кад би из жељезничког вагона који извесном брзином јури, скочили, ми би у тренутку, кад на земљу стајемо, брзином самога воза морали горњим делом тела пасти на земљу. — Кад чекић, секиру и т. д. хоћемо да набијемо на држаље, ми држаљетом ударамо о земљу; онда се држаље прво заустави а чекић продужи и даље своје кретање и тако се сам на држаље набија.

128. Кад какав страни утицај дејствује на неко тело, на пр. парна снага на локомотиву, онда, као што знамо,

локомотива ће се кренути тек онда, кад парна снага буде толика, да савлада отпоре трења и ваздуха. Ако је парна снага управо равна том отпору, локомотива се неће кренути; с тога у почетку мора парна снага бити већа од отпора, јер тек пошто савлада све отпоре, може локомотиви дати и извесну брзину. По закону о постојаности, маса локомотиве задржава своју брзину и догод парна снага буде већа од отпора, брзина расте и то доста брзо. Међу тим, са растењем брзине локомотиве расту и отпори, које она има да савлађује и тако наступи напослетку једна извесна равнотежа, по којој, нова снага паре, савлађује старе и нове отпоре, и локомотива се услед постојаности креће са раније стеченом сталном брзином. Кад се пара заустави, онда отпори савлађују стечену брзину локомотиве која постаје све мања, док не буде = нули и док се не заустави.

Кад не би било постојаности кретања, онда би једна тица, која из гњезда полети, на неколико стотина и хиљада километара далеко од гњезда пала на земљу, јер би се земља због окретања око себе и око сунца, морала далеко испод тице измаћи. Кад је први пут изнесена мисао о окретању земље како око осе тако и око сунца, онда су противници, незнајући закон о постојаности кретања сличне примере наводили као против доказе кретању земљином. Па чак и знаменити астрономи као Тихо и Ричиоли говорили су, да кад би се земља зајиста обртала са запада на исток, онда би камен пуштен са врха какве куле, морао западно иза куле пасти на земљу. Кад је Галилео 1638 изнео закон о постојаности и горња пребацивања њина уклонио *Њутн је у њему баш нашао доказ за обртање земљино*. Јер пошто се врх куле налази даље од средишта земљиног но њено подножје, онда мора, ако се земља зајиста обрће око себе, врх куле имати већу брзину према истоку но подножје, и камен који с врха куле пада, мора у свом паду услед постојаности задржати ту већу источну брзину па с тога и мало даље, али источно од подножја пасти Из полупречника земљиног и висине куле, даје се лако израчунати разлика у брзинама на подножју и на врху куле. Опити Безенберга (1802) на Михаиловом торњу у Хамбургу, потврдили су како по величини, тако и по правцу скретање камена и тиме и истинитост обртања земљиног.

III. ПУТАЊА И БРЗИНА КРЕТАЊА

129. Траг, који покретна тешка тачка или тело у свом кретању остави, зове се *путања*, *пут* или *трајекторија* покретне тачке или тела. Један врло мали део путање зове *елеменат пута*.

Како путања једне тачке, тако исто и путања целога тела, на пример путања топовске кугле, или путања целе земље преставља се једном *геометријском линијом*, која није ништа друго до путања или оне усамљене тешке тачке, или пак оне тешке тачке у коју смо замислили концентрисану масу целога тела. И према томе, да ли је та линија, којом је представљена путања тела права или крива, т. ј. да ли *правац* кретања остаје исти или се мења, сва се кретања у природи деле на *праволинијска* и *криволинијска кретања*. Кад је путања крива линија, могу наступити два случаја: или све тачке криве линије леже у једној истој равни, и онда је крива линија или курва *равна* — или су тачке криве линије у разним равнинама и онда се она зове *неравна* или *просторна*. Равне су криве линије на пример круг, елипса и т. д. а просторна је на пример завојна, завртањска линија.

Тело, које слободно пада на земљу, креће се по правој линији; једна тачка на обиму воденичног кола, или нека тачка на сатној казаљци описује кружну путању. Ма која пак тачка на клатну код сахата описује само један кружни лук. Једна тачка на обиму колског точка, описује у свом кретању кружну путању само док се њено кретање сравњује према осовини као сталној тачки; али ако се точак у свом окретању и премешта по друму и ако се путања те тачке сравњује према друму, онда она описује сасвим другу и много сложенију криву линију тако звану *циклојиду*, које су разне тачке само дотле у једној равни, док се точак креће по правој линији. Све планете окрећу се око сунца по елиптичним путањама.

130. Кад се једно тело креће по правој линији, т. ј. кад сви његови делови описују и једнаке и паралелне путање, онда се каже да се тело креће *транслаторно*. На против кад се једно тело тако креће да сви његови делови описују сличне и паралелне али не једнаке путање онда се такво кретање тела зове *обртно* или *ротaторно* или *централно*. Кад се на пример једно тело

окреће око своје осовине онда разне његове тачке описују све кружне путање, које су међу собом паралелне али нису једнаке. Такво је на пример кретање обртање земљино око осе. Па и код окретања земљиног (као и осталих планета) око сунца разне њене тачке описују сличне и паралелне али не једнаке путање. Све се тачке некога тела код централних кретања крећу по затвореним путањама. — Кад се једно тело тако креће да у разна времена пролази кроз разне положаје своје путање, али се истим путем враћа натраг и пролази кроз све своје пређашње положаје, онда се каже да такво тело *трепери* или *вибрира* и таква се кретања зову *хармонична* или *периодична*. Тако се на пример креће клатно код сахата, само су његова треперења врло спора.

131. Самом путањом, кретање још није сасвим одређено, јер треба још водити рачуна о времену за које ће покретно тело, извесну путању прећи. Од два тела, оно се тело креће *брже*, које за исто време пређе дужу путању. Или, ако су им путање једнаке оно је тело брже, које за краће време своју путању пређе. За мерење кретања у опште узима се она путања или пут, који тачка или тело пређе за једну секунду. Та се путања зове *брзина* и мери се дужинским мерама: метром, хватом, сатима хода и т. д. И у место да се каже да неко тело прелази дужи или краћи пут за неко извесно време, каже се краће, да се оно креће са већом или мањом брзином.

Кад се говори о брзини, т. ј. о путу који неко тело пређе у једној секунди, онда је треба тако разумети и код кретања, која су врло кратка и која не трају ни целу секунду. У том случају могло би се казати, да је брзина онај пут, који би извесно тело морало прећи за једну секунду, кад би такво кретање најмање толико трајало.

132. У опште узев, брзине могу бити *сталне* и *променљиве* и према томе се сва кретања деле на две велике групе: на *једнака* и *променљива кретања*. За она се кретања каже да су једнака, кад се неко тело на целом свом путу креће једнаком брзином. Таква су на пример кретања, обртање земљино око осе, (видели смо напред, да окретање земљино око сунца није једнако већ променљиво), простирање светлости, кроз једноставну средину, приближно се може узети да је једнако и кре-

тање казаљака на добром сахату као и многих машина за време равнотежног хода. На против, кад се брзина покретног тела мења, онда имамо посла са променљивим кретањем. Ако су сад, промене брзине правилне и једнаке, онда се такво кретање зове *једнако променљиво*; ако су правилне и неједнаке, онда се оно зове *неједнако променљиво*. Ако су најзад промене неправилне онда је то *неправилно променљиво кретање*.

133. Може једно исто кретање бити у целини једнако а у деловима променљиво. Такво је на пример кретање клатна на сахату; оно за свако цело клаћење утроши увек исто време, те дакле кретање клатна тако схваћено једнако је. Међу тим док клатно из једног свог положаја пређе у други, на пример док с десне стране пређе на леву, креће се променљиво, јер кроз средину пролази са највећом брзином и иде све спорије пењући се на једну или на другу страну. Строго узевши та кретања у целини не могу се сматрати ни као једнака, ни као променљива, па за то се и зову *периодична* кртања.

Па и корачање код човека не може се сматрати као једнако кретање, јер истина каже се, да је неко прешао извесан пут једнаким корацима, дакле једнаком брзином, али се у сваком појединим кораку нога креће променљиво од прилике као и клатно. У таквим приликама, као и код кретања клипа парне машине, окретања земљиног око сунца, месечевог око земље и т. д. имамо посла са *једнаким периодичним* кретањима.

134. Да би се променљива кретања могла упоређивати са једнаким, уведен је појам *средње брзине* код променљивих кретања. *И она се брзина код променљивог кретања назива средњом брзином, са којом би се неко тело морало кретати једнако, па да за исто време пређе исти пут, за које га је време то исто тело прешло крећући се променљиво.* Из променљивих се брзина добија средња брзина, кад се збир почетне и крајње брзине (у неком извесном времену) подели са два.

135. Строго узевши ни једно кретање које ми у природи налазимо није једнако, Јер и сама свелост нигде се у природи не креће једнаком брзином; један сунчев зрак полазећи са сунчеве површине пролази најпре кроз огромну сунчеву атмосферу врло разне густине, за тим пролазећи кроз етар, за који се такође не може казати

да је свуда једне густине, улази у земљину атмосферу у којој се такође свакога трренутка простире другом брзином. Ни обртање земљино око осе, које се највише приближује једнаком кретању, не може се сматрати као потпуно једнако. Па за то можемо извести овај закључак: *сва су кретања у природи промењљива.* А кад говоримо о једнаком кретању, појединих природних тела, ми треба увек под тим именом да разумемо средњу брзину промењљивог кретања истих тела.

136. *Примери у природи посмотрених брзина.*

	МЕТАРА У СЕКУНДИ
Растење ноктију	0·000000002
Највећа брзина леда (по Тиндалу)	0·0000099
Растење бамбуса (Bambusa phyllostachys mitis)	0·000072
Протицање крви у репу пуноглаваца	0·00050
Протицање крви у капиларима човечије ретине	0·00075
Највећа брзина леда у глечеру Jakobshavn-у (на Гренланду) по Хеланду	0·00026
Пуж	0·0015
Падање земље према сунцу	0·003
Сагоревање барута на слободном ваздуху (по Пјоберу)	0·013
Протицање крви у артерији cruralis код пса	0·16
Сагоревање барута у великом топу по Кастану	0·32
Протицање крви у аорти код пса	0·40
Теретна кола	0·80
Вода код већине река	0·90
Сагоревање динамита не сабијеног без детонације (по Пјоберу)	од 0·80—1·04
Поветарац који се једва осећа	1·0
Коњ у ходу	1·10
Човек у ходу (4 километра на сат)	1·11
Добар пливач	од 1·12—1·14
Немачки пешак	1·3
Мува кад полако лети	1·60
Тело пада на површини месечевој после једне секунде брзином	1·61
Човек у ходу (6 килом. на сат)	1·66
Мужјак свилене бубе (Attacus daphna) у лету	1·86
Умерен ветар	2·00
Коњ у касу	2·10
Махари (пустињска камила)	2·38
Човек у трку (на дугом путу)	2·60
Поштанска кола	2·70
Тркачи на скидору (тоцилаче по снегу) по Норденшилду	2·95

	МЕТАРА У СЕКУНДИ
Халеова комета у афелу	3·00
Тело пада на површини Марсовој после једне сек.	3·43
Трамваји	од 2—3·50
Коњ у фијакеру	3·80
Ветар слаб	4·00
Брза река	4·00
Тело пада на површини Венериној после једне секунде брзином	4·41
Коњ у галопу	4·50
Спуштање сонде у дубоком мору	4·57
Тело пада на површини нептуновој после једне сек.	4·67
Камила по Буркхарту	4·97
Морски брод (средња брзина)	5·00
Тело пада на површ. Меркуровој после једне сек.	5·28
Највећа брзина првог жељезничког воза из Манчестра у Ливерпул 15 септ. 1830 год.	5·36
Дим у оџаку	од 3—5·50
Тркач пешак	5·77
Обичан ветар	од 5—6·00
Брзина коју су постигли на свом балону капетани Кребс у Ренар у Медону 1884	6·39
Таласи од 30 метара висине у води од 300 метара дубине	6·82
Тркач пешак по Веберу	7·10
Мува у обичном лету (Musca domestica)	7·62
Ветар, добар за ветрењаче	7·62
Јелен вукући саонице	8·40
Путнички океански бродови	9·77
Тело пада на површини земљиној после једне секунде брзином	9·81
Јачи ветар	10·00
Тело пада на површини Урановој после 1 сек.	10·30
Тело пада на површини Сатурновој после 1 сек.	10·80
Кишне капи	11·00
Кит	11·00
Торпедни брод	11·19
Најбржи јахаћи коњ у касу	11·66
Извежбан тоциљач	12·00
Највећа дозвољена брзина товарних возова	12·50
Бујице на Алпима	14·28
Највећа брзина на велосипеду	15·00
Камен јако бачен из руке	16·00
Јак ветар	16·00
Брзи воз од 60 килом. на сат	16·67
Коњ у галопу на трци (Little Duck, у Паризу 25 маја 1884)	16·90
Препелица у лету	17·80
Камен пада на површ. земљ. после 2 сек.	19·62

	МЕТАРА У СЕКУНДИ
Експрес од 75 килом. на сат	20·83
Таласи океана (кад је бура)	21·85
Тело кад пада на површ. Јупитеровој после једне секунде	24·47
Пас-зечар	25·34
Енглески експреси	26·82
Путнички голуб по Гобену	27·00
Соко у лету	28·00
Олуја	од 25—30·00
Рапидни воз Енглески „Jrish Mail“	29·94
Средња брзина кутија у цевима ваздушне поште у Берлину	30·00
Рапидни воз „Flyng Dutchman“ из Лондона у Ексетер	30·30
Орао	31·00
Саонице на залеђеним рекама северне Америке	31·09
Тело пада на повр. земљ. са висине од 50 мет.	31·33
Преношење осећања у човековим нервима	33·00
Проба са једним возом из Jersey Citi у Филаделфију (Bound Brook Road)	35·75
Оркан	40·00
Тело пада на земљу са висине од 100 мет.	44·29
Оркан кад чупа дебела стабла из земље	45·00
Пад једног аеролита од 1 кил. тежине и коцкастог облика	48·45
Четири путничка голуба грофа Кароли, у 1884 из Париза у Пешту (1293 килом. за 7 сати)	51·31
Највећа теоријска брзина периферије замајца парне машине	52·50
Домаћа мува (Musca domestica) највећа брзина	53·35
Премештање буре од 21 септ. 1881 из Каора у Прадел (194 клм. на 1 сат)	54·17
Пад једног аеролита од 1 кил. тежине и округластог облика	60·00
Ласта у лету	67·00
Камен пада на земљу са висине од 300 мет.	76·72
Циклон од 22 марта 1882 у Wallinford-у (Конектикуту)	115·78
Брзина живиних молекила	184·00
Почетна брзина танета у ваздушној пушци (притисак од 100 атмосфера)	206·00
Прилив морски услед земљотреса у Арики 1 Авг. 1868 (из Арике у Хонолулу)	227·38
Тело пада на површини Сунчевој после једне сек.	269·77
Прилив морски услед експлозије на острву Кракатоа 15 Авг. 1883	294·00
Брзина сваке тачке у Београду (услед обртања земље око осе)	328·80

	МЕТАРА У СЕКУНДИ
Брзина атмосферских таласа услед земљотреса на Кракатоа (из Крак. у Петроград)	334·00
Брзина звука у ваздуху на (10° Ц.)	337·20
Пара избија из казана под притиском $1\frac{1}{2}$ атмосф.	343·00
Почетна брзина пушчаног танета (пушка Martini-Henry)	385·00
Ваздух под притиском једне атмосф. кад истиче у безваздушан простор	395·00
Камен што избацује Везув	406·00
Почетна брзина пушчаног танета из пушке Маузерове.	425·00
» » » » » » Gras-ове модел од 1874	430·00
Брзина једне тачке на екватору земљином	464·00
Брзина молекила ваздуха	485·00
Почетна брзина топовске кугле (сувоземн. војске)	500·00
» » » » морске ескадре	од 605—700
Почетна брзина танета из Lebel-ове пушке	800
Простирање таласа прилива у Пацифику	872
Простирање земљотреса од $^{18}/_{25}$ јула 1855 из Вијежа у Штрасбург	970
Окретање месечево око земље (у апогеуму)	975
Камен из вулкана на острву Тенерифи	1034
Окретање месечево око земље (у перигеуму)	1030
Брзина звука у алкохолу (+ 10° Ц.)	1157
Окретање II сателита Марсовог (Deimos)	1157
Брзина звука у води (+ 8° Ц.)	1435
Кретање телескопско северњаче (α у малом медведу).	1500
Окретање I Марсовог сателита (Phobos)	1833
Брзина молекила водоника	1844
Брзина једне тачке на сунчевом екватору	2028
Брзина којом би требало бацити неко тело па да савлада привлачну снагу месечеву по Лапласу.	2396
Експлозија праскајућег гаса по Бертело-у	2500
Брзина звука у сребру	3060
Окретање IV сателита Урановог (Oberon)	3300
Брзина звука у ливеном гвожђу	3541
Брзина звука у бронзи	3628
Теориjска брзина земљотресног таласа у компактном граниту	од 2450—3650
Окретање VIII сателита Сатурновог (Japet)	3738
Окретање III сателита Урановог (Titania)	3814
Окретање Нептуновог сателита	4505
Окретање II сателита Урановог (Umbriel)	4906
Окретање Нептуна око сунца	5390
Окретање I сателита Урановог (Ariel)	5763
Експлозија динамита по Абелу и Нобелу	од 5130—5790
Окретање VII сател. Сатурновог (Hyperion)	5794
Брзина звука у чамовом дрвету	6120

	МЕТАРА У СЕКУНДИ
Окретање VI сател. Сатурновог (Titan)	6398
Окретање Урана око сунца	6730
Кретање сунца према звезданом јату Херкулу између ω и μ (кретање сунчевог система)	7642
Окретање IV сателита Јупитеровог (Calisto)	8359
Теориска брзина једног тела кад би пало у средину земље падајући 19 мин. 10 сек.	9546
Окретање Сатурна око сунца	9584
Окретање V сателита Сатурновог (Rhea)	9741
Брзина једне тачке на Сатурновом екватору . . .	10541
Окретање III сателита Јупитеровог (Ganimed) . . .	10869
Брзина телескопског кретања Веге (α у „лири“) . .	11000
Окретање IV сателита Сатурновог (Dione)	11516
Брзина са којом би требало бацити једно тело па да више не падне на земљу	11700
Брзина једне тачке на Јупитеровом екватору . . .	12491
Окретање Јупитера око сунца	12924
Окретање III сателита Сатурновог (Tethys)	13038
Окретање II сателита Јупитеровог (Europe)	13999
Окретање II сателита Сатурновог (Encelade)	14568
Окретање I сателита Сатурновог (Mimas)	16425
Окретање I сателита Јупитеровог (Jo)	17667
Болид од $^2/_{14}$ маја 1864; аеролит из Оргеља по Laussedat-у	20000
Спектроскопско кретање Капеле (α у кочијашу) по Christie et Maunder-у	+20000
Телескопско кретање α у „центауру“ по Gill и Elkin-у.	23174
Окретање Марса око сунца	23863
Спектроскопско кретање Регулуса (α у „лаву“) по Huggins-у . . . . од +19000 до	+27000
Окретање земљино око сунца	29516
Окретање Венерино око сунца	34630
Спектроскоп. кретање Сиријуса по Huggins-у од +29000 до	+35000
Спектроскопско кретање Бетајгајца (α у „оријону“) по Huggins-у	+35000
Телескопско кретање Сиријуса α у „вел. псу“ . . .	38600
Спектроскопско кретање Кастора (α у „близанцима“) по Christi-у и Maunder-у	+40000
Телескопско кретање Капеле	47100
Окретање Меркура око сунца	47327
Спектроскопско кретање Регулус-а (по Chr. и M.) .	+48000
Аеролит у Путулску $^{18}/_{30}$ јан. 1878 по Скјапарели-у	54000
Спектроскопско кретање бисера (α у сев. круни) по Chr. и M.	+58000
Спектроскопско кретање Арктура и Веге по Christie-у и Maunder-у	—62000
Болид од $^2/_{14}$ марта 1863 виђен у средњој и западној Европи	63000

	МЕТАРА У СЕКУНДИ
Спектроскопско кретање Прокијона (α у „малом псу") по Chr. и M.	+64000
Телескопско кретање 61 у лабуду	64300
Обична кретања у сунчевој атмосфери	од 30000—65000
Озвездине по A Newton-у и Schiaparelli-у	од 12000—71000
Болид од 5 септ. 1868 (по нов.)	79000
Спектроскопско кретање Полукса (β у „близнацима") по Huggins-у	—79000
Телескопско кретање Арктура	83200
Спектроскопско кретање Веге	—87000
Халеова комета у перихелу	393000
Бура у сунчевој атмосфери по Young-у	402000
Велика комета од 1882 у перихелу	480000
Велика комета од 1843 у перихелу по R. S. Ball-у	521000
Брзина којом би требало бацити неко тело са сунчеве површине па да се више не врати на сунце.	608000
Сунчеве ерупције по Secchi-у	900000
Брзина електрицитета у подморском каблу	4,000000
Волтина струја у телеграфском ланцу	11,690000
Индукциона струја	18,400000
Електрицитет у ваздушној телеграфској жици	36,000000
Муња у једној сунчевој пеги по Peters-у (у Напољу 1845)	200,000000
Брзина светлости (петролеумске лампе) по Cornu-у	298,776000
Брзина светлости сунчеве близу хоризонта по Michelson-у	299,940000
Брзина светлости сунчеве близу хоризонта по Cornu-у.	300,242000
Брзина светлости од усијане креде по Young-у и Forbes-у	300,290000
Брзина светлости од усијане креде по Cornu-у 1874.	300,400000
Брзина светлости електричне по Young-у и Forbes-у.	301,382000
Брзина електричне струје пражњењем једне лајденске боце кроз бакарну жицу од 0·0017 милиметара у пречнику	463,500000

Примедбе. По себи се разуме да неке од тих брзина не могу бити сасвим тачне и служе да само даду извесан појам о себи. Код оних брзина које могу бити различне, горње цифре значе увек највећу вредност, где то иначе није изрично казано.

Брзине окретања планета и њихових сателита прорачунате су узевши да је средња даљина земље од сунца 148,250,000 килом. Ако се узме Young-ова цифра од 150025162 килом. (од 1881 год.) онда треба горње вредности повећати са 12‰.

„Телескопско" кретање једне звезде значи њено кретање, које се може видети и измерити дурбином, и које бива управно на правац зрака; „спектроскопско" кретање се дурбином не види, јер се онда звезда креће у правцу самога зрака било да се приближује земљи, (знак — испред цифара) било да се од ње удаљује (знак +). Та се кретања виде и мере спектроскопом.

Највећи део тих вредности узет је из брошуре: „Tableau de diverses vitesses exprimées en mètres par reconde," par *James Jackson*.

137. Поред облика путање и брзине са којом се нека тачка или тело креће, да би кретање било потпуно одређено ваља још да водимо рачуна о *правцу брзине*. Код праволинијског кретања, правац брзине иде на страну на коју и путања, т. ј. правац брзине и правац путање поклапају се. Међу тим код криволинијског кретања, правац брзине и правац путање не поклапају се. У том се случају говори о *тренутном, моментаном правцу*, а под тим правцем разуме се тангента повучена на ту криву линију и у оној тачки путање за коју брзину посматрамо. На пример код кружног кретања, правац брзине у свакој тачки путање иде правцем тангената, које за сваку посматрану тачку путање повучемо. Па како се зна, да су све тангенте круга управне на полупречник, то је и правац брзине код кружног кретања управан на полупречник круга.

Праволинијско кретање може бити састављено или само из једног или из више праволинијских кретања. На против свако криволинијско кретање је сложено најмање из два праволинијска кретања *разних праваца*. Праволинијска се кретања зову још *проста*, а криволинијска *сложена* кретања.

138. На послетку ваља да водимо рачуна и о *смислу брзине*, јер по свакој линији, била она права или крива тачка се може кретати на једну или другу страну, дакле у једном или другом смислу. Обично се кретање тачке или тела рачуна од неког извесног места као од почетка па се један смисао (десни или горњи) назива *положан*, а други (леви или доњи) *одречан*. Зато дакле и брзине могу бити положне или одречне.

Кретање са положном брзином, (било по правој или кривој путањи) зове се *прогресивно (напредно)*, а са одречном брзином *ретроградно (назадно)*.

139. Брзине се обично представљају графички т. ј. линијама и то тако, да се на свакој од њих може одма да види *правац, смисао* и *величина*. Правац се познаје по правцу који имају линије, које представљају брзине

(хоризонталан, вертикалан, нагнут); смисао је обележен стрелицом на једном крају сваке линије, а величина брзине представљена је дужином линије.

140. Мало час смо видели да у природи постоје само променљива кретања. Говорећи пак о променљивим кретањима у опште, видели смо да она могу бити *једнако променљива*, *неједнако променљива* и *неправилно променљива*. Пошто сад знамо да брзине могу бити положне и одречне, то имамо да додамо, да се она, (било једнако или неједнако променљива) кретања, код којих су брзине положне, зову *убрзана*, а она код којих су брзине одречне зову *успорена*. Према томе ми можемо целокупно правилно променљиво кретање у природи овако да групишемо:

Променљиво	једнако променљиво.	једнако убрзано једнако успорено
кретање.	неједнако променљиво.	неједнако убрзано неједнако успорено

Најзад, кретање код кога би брзина била час положна час одречна зове се *неправилно*. У горњем обрасцу обухваћено је и једнако кретање, јер је код њега промена брзине равна нули.

Једнако кретање

141. Кад се тачка или неко тело креће једнаком брзином, онда се каже да се креће *једнако*. То кретање може бити и по правој и по кривој линији, оно је најпростије али је и најтеже остварити га у практици, а у самој природи се врло ретко налази.

а, једнако праволинијско кретање

142. Кад се тело креће једнако и пређе за једну секунду неку извесну путању, коју смо ми назвали брзином и коју ћемо ми означити писменом с (celeritas = брзина које нас опомиње у исти мах да је брзина стална = constant) онда је лако појмити, да ће оно прећи за две секунде два пут онолико колико за једну т. ј. 2 с, за три секунде три пут онолико, т. ј. 3 с, за четири 4 с и т. д. У опште узев, за неки извесан број секунада t

(*tempus* = трајање = време) тело ће прећи t пута c, т. ј. tc. И ако целу ту путању означимо за s (spatium = пут, простор, путања.) Онда можемо да напишемо ову основну једначину једног кретања:

$$s = c\,t \quad \text{. . . . .} \quad (36$$

Из те једначине можемо добити још ове две:

$$c = \frac{s}{t} \quad \text{. . . . .} \quad (37$$

и

$$t = \frac{s}{c} \quad \text{. . . . .} \quad (38$$

Кад се те три једначине речима искажу онда добијамо ова правила за једнако праволинијско кретање:

Пут код једнаког кретања налазимо, кад брзину помножимо временом.

Брзину код једнаког кретања налазимо, кад пут поделимо временом.

Време код једнаког кретања налазимо, кад пут поделимо брзином.

Или још. Пут је раван производу из брзине и времена; брзина је равна количнику из пута и времена; време је равно количнику из пута и брзине.

143. Кад се упореде два разна једнака кретања, на пример кретање $s_1 = c_1 t_1$ и $s_2 = c_2 t_2$ онда добијамо односе између њих кад их поделимо:

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{c_1 t_1}{c_2 t_2} \quad \text{. . . . .} \quad (39$$

Ако је овде $s_1 = s_2$ и $t_1 = t_2$ онда излази да је и $c_1 = c_2$. То ће рећи: *кад две тачке или тела за једнака времена пређу једнаке путове, онда су им брзине једнаке.*

Кад у горњој сразмери ставимо $t_2 = t_1$ онда имамо однос између путова и брзина т. ј.

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{c_1}{c_2} \quad \text{. . . . .} \quad (40$$

Кад ставимо $c_1 = c_2$ добићемо однос између путова и времена:

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{t_1}{t_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (41$$

Најзад однос између брзина и времена добићемо ставивши $c_1 = c_2$ т. ј.

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{t_2}{t_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (42$$

Код прва два односа исказано је правило: *да су путови два разна кретања управо сразмерни или брзинама (кад су времена једнака) или временима (кад су им брзине једнаке).* Трећи пак однос показује *да су брзине обрнуто сразмерне временима кад су путови једнаки.*

На послетку можемо из горње сразмере да поставимо још и ове

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{c_1 t_1}{c_2 t_2} \quad \text{или} \ldots\ldots\ldots\ldots (43$$

$$c_1 : c_2 = \frac{s_1}{t_1} : \frac{s_2}{t_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (44$$

$$t_1 : t_2 = \frac{s_1}{c_1} : \frac{s_2}{c_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (45$$

А то ће рећи: *Кад су путови и времена два једнака кретања различита, онда су* a) *путови сразмерни производима из брзина и времена* или b) *њихове брзине су сразмерне одговарајућим количницима из путева и времена* или c) *њихова су времена сразмерна количницима из путева и брзина.*

Једнако кружно кретање.

144. Кад се једно тело окреће око једне праве непокретне линије, тако зване *осовине* или *осе*, онда свака тачка тога тела, која не лежи у самој осовини, описује кружну путању. Свима тим кружним путањама (која долазе од разних тачака тога тела) налазе се средишта у самој оси, а полупречници тих кружних путања јесу њихова управна одстојања од осе. Равни свију кружних

путања стоје дакле управно на осу и међу собом су паралелне.

Пошто се поједине тачке тела налазе на разним одстојањима од осовине, те дакле и кружне путање појединих тачака имају разне полупречнике то су и *брзине* свију тих тачака различите. Тачке, које су ближе осовини описују мање кругове но оне које су од осовине далеко а пошто се све тачке за исто време обрну око осовине, то је очевидно да ће брзина сваке поједине тачке бити у толико већа, у колико је та тачка даља од осовине.

Код праволинијског кретања све су тачке некога тела имале исту брзину; овде пак само оне тачке тела имају исту брзину, које су на истом одстојању од осе обртања.

Означимо одстојање неке тачке од осовине са r_1 онда ће периферија или обим њене кружне путање бити $s_1 = 2 r_1 \pi$, а њена *периферна брзина*

$$C_1 = \frac{s_1}{t} = \frac{2 r_1 \pi}{t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (46$$

Периферна брзина друге неке тачке која је на остојању r_2 од осовине и која описује путању $s_2 = 2 r_2 \pi$ биће:

$$C_2 = \frac{s_2}{t} = \frac{2 r_2 \pi}{t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (46'$$

У опште неке n-те тачке биће периферна брзина

$$C_n = \frac{s_n}{t} = \frac{2 r_n \pi}{t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (46''$$

Време t је код свију тих тачака једно исто, јер се све за исто време обрну око осовине пошто су међу собом у чврстој вези.

145. Да би се периферне брзине разних тачака једног истог тела а такође и разних тела међу собом могле упоређивати, *као мерило брзине узима се брзина оне тачке, која се налази на остојању* $= 1$ (сантиметар, метар и т. д.) *од осовине*. Та се брзина зове *угловна брзина*, и означава се са ω. Пошто је периферија оне тачке која се налази на остојању $= 1$, равна 2π, то је онда угловна брзина

$$\omega = \frac{s}{t} = \frac{2\pi}{t} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (47$$

Кад упоредимо обрасце за периферну брзину (46, 46', 46") са обрасцем за угловну брзину (47) онда видимо како се све периферне брзине разних тачака могу изразити угловном брзином, кад њу помножимо са остојањем сваке тачке од осовине. Тако ћемо добити ове обрасце

$$C_1 = r_1\,\omega, \qquad C_2 = r_2\,\omega \cdot \cdot \cdot \cdot C_n = r_n\,\omega$$

или у опште

$$C = r\,\omega \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (48$$

одакле још

$$\omega = \frac{C}{r} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (49$$

Угловна брзина ω може бити стална и промењљива, те према томе и кружно кретање може бити *једнако* и *промењљиво*. По себи се разуме да ми свуда овде сматрамо да је угловна брзина стална, јер имамо посла са *једнаким кружним кретањем*.

146. Угловна се брзина одређује обично на тај начин, кад се тражи колико се пута неко тело окрене у једној минути. И кад се нађе, да се неко тело обрнуло n пута у минути, онда је *периферна брзина* неке његове тачке, (која је на остојању r од осовине).

$$C = \frac{2r\pi n}{60} = \frac{r\pi n}{30} \quad \ldots \ldots \ldots (50$$

јер да нађемо брзину, т. ј. пут за једну секунду, треба пут учињен за једну минуту поделити са 60 секунада.

Из ове периферне брзине одређујемо угловну, помоћу обрасца (49.

$$\omega = \frac{r\pi n}{30\,r} = \frac{\pi n}{30} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (51$$

Примери. Колика је периферна брзина неке тачке на периферији једнога воденичног камена од 1 метра у пречнику кад се он окрене 200 пута у минути? Периферна је брзина

$$c=\frac{2r\pi n}{60}=10{\cdot}47^{m}.\ —$$

Кад један брзи воз пређе 45 клм. на сат, колико се пута у минуту окрену точкови локомотиве, кад имају $2{\cdot}4^{m}$ у пречнику? Овде је пут = 45 клм. = 45.000 мет.; обим точка т. ј. пут који он пређе кад се један пут окрене износи $2{\cdot}4 \times 3{\cdot}14 = 7{\cdot}536^{m}$. Кад 45000 поделимо са 7·536 добијамо број обрта точкова за сат, а за минут биће

$$n=\frac{45000}{60\times 7{\cdot}436}=\text{округло 100 обрта у минуту}\ —$$

Колика је брзина једне тачке на земљином екватору, кад је обим екватора у округлој цифри 40089·6 километара?.... 464^{m}. — Казаљка једног сахата на дувару дугачка је 8^{cm}, а) колики пут прелази врх те казаљке у секунди т. ј. колика је њена периферна брзина c? в) колика је угловна брзина казаљке, ω?...

$$c=0{\cdot}014^{cm};\ \omega=0{\cdot}00175^{cm}.\ —$$

Пречник предњег точка на велосипеду износи 120 cm. а задњег 25 cm. колики је пут прешао путник, кад је се мали точак 1000 пута више обрнуо но велики?

Променљиво кретање.

147. Напред смо видели да су променљива кретања она, код којих се брзина сваке секунде мења, те дакле код којих је брзина променљива. И према томе на који ће се начин мењати брзина, и променљива се кретања међу собом разликују. У опште, променљива кретања могу бити *једнако* и *неједнако* променљива.

А. Једнако променљиво кретање.

148. Једнако је променљиво кретање оно, код кога су промене брзине једнаке. Сама пак промена брзине може почети из релативног мира, или тек пошто се тело неко извесно време кретало. Према томе делимо једнако променљива кретања на

1) *једнако променљива кретања без почетне брзине* и на

2) *једнако променљива кретања са почетном брзином.*

Било да је једнако променљиво кретање са почетном брзином или без ње, имамо да разликујемо два случаја:

да ли брзина сваке секунде *расте* или *опада* т. ј. да ли је промена брзине *положна* или *одречна*. Прва се кретања зову *једнако убрзана* а друга *једнако успорена*.

Она количина, за коју се брзина сваке секунде промени, па било да порасте или да опадне зове се *убрзање* или *акцелерација* и бележићемо је са *a*. Код убрзаног кретања убрзање је положно ($+a$) а код успореног оно је одречно ($-a$).

149. Једнако промењљиво кретање без почетне брзине.— Брзина код промењљивог кретања разликује се од брзине код једнаког кретања јер зависи и од убрзања и од времена, т. ј. јер је сваке секунде другојача. Узмимо да се тело почне кретати из релативно мирног стања, једнако убрзано са убрзањем = a. Другим речима, тело у почетку прве секунде има брзину = 0 а на крају те прве секунде стекло је убрзање а које је у исти мах и брзина на крају прве секунде; ако промењљиву брзину означимо са *v* (*velocitas* = брзина, која нас у исти мах опомиње на *variabile* = промењљиво) онда ће очевидно на крају прве секунде та брзина бити

$$v_1 = a.$$

Кад се тело креће још једну секунду, добиће убрзања још за једно a, тако да ће на крају друге секунде имати брзину $v_2 = 2\,a$; на крају треће секунде $v_3 = 3\,a$ и т. д. И ако у опште тражимо брзину v промењивог кретања после времена t, биће

$$v = t\,a = a\,t. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (52$$

Дакле *крајња брзина код једнако промењљивог кретања равна је производу из убрзања и времена*.

И та се брзина као и стална (*c*) мери метрима и т. д. за секунду, само она не значи пут *који је тело одиста прешло* у једној секунди, него пут *који би тело прешло* кад би се од тог тренутка t, *кретало једнако и са сталном брзином v*.

За једнако успорено кретање биће

$$v = -\,a\,t. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (52'$$

150. Код промењљивог кретања може бити говора и о *средњој* брзини а то је као што смо видели она брзина, са којом би се неко тело кретало *једнако* па да за *исто време* пређе онај *исти пут* који прелази кад се креће *променљиво*. Ту ћемо средњу брзину добити из променљиве просто на тај начин, кад саберемо променљиве брзине у почетку и на крају посматраног времена па ту суму поделимо са два. На пример колика је средња брзина променљивог кретања у првој секунди, кад му је убрзање а? У почетку прве секунде као што смо видели тело је било мирно, дакле брзина $= 0$, а на крају те секунде добило је брзину а дакле средња брзина биће

$$\frac{o+a}{2} = \frac{a}{2} = c_1.$$

Исто тако, ако тражимо средњу брзину у четвртој секунди добићемо кад брзину у почетку четврте секунде (или на крају треће сек.) $= 3\,a$ саберемо са брзином на крају те секунде $4\,a$ и збир поделимо са два дакле

$$\frac{3\,a + 4\,a}{2} = \frac{7\,a}{2} = c_4.$$

Друго ће опет бити средња брзина за прве четири секунде. Јер у почетку прве секунде брзина $=$ о, а на крају четврте $= 4\,a$, с тога је сад средња брзина

$$\frac{o + 4\,a}{2} = 2\,a = c_{1+2+3+4}.$$

У опште, средња брзина у некој *t*-тој секунди биће

$$\frac{a\,(t-1) + a\,t}{2} = c_t \quad \dots\dots\dots (53$$

а средња брзина за свих *t* секунада биће

$$\frac{o + a\,t}{2} = \frac{a\,t}{2} = \frac{v}{2} = c_{1+2+3+\dots\dots t} \quad \dots (53'$$

151. Пошто смо кретање са променљивим брзинама помоћу средњих брзина свели на кретања са сталним брзинама онда ћемо путању код променљивог кретања наћи на овај начин. Знамо да је код једнаког кретања

$$s = c\,t.$$

Из исте ћемо једначине добити и путању променљивог кретања кад у место c ставимо оне вредности, које смо за њ нашли у променљивим брзинама*). Тако на пример пут у самој првој секунди биће

$$s_1 = c_1 = \frac{o + a}{2} = \frac{a}{2}$$

у самој другој

$$s_2 = c_2 = \frac{a + 2a}{2} = \frac{3a}{2}$$

у самој трећој

$$s_3 = c_3 = \frac{2a + 3a}{2} = \frac{5a}{2}$$

$$s_4 = c_4 = \frac{3a + 4a}{2} = \frac{7a}{2}.$$

. . . .

$$s_t = c_t = \frac{a(t-1) + at}{2} = \frac{(2t-1)a}{2}.$$

То су путање за сваку секунду посебице, и као што видимо, те путање расту као непарни бројеви 1, 3, 5, 7..... Целокупну путању добићемо кад све те путање саберемо. Тако путања у самој првој секунди биће

$$s_1 = \frac{a}{2} = \cdots\cdots \frac{a}{2} 1^2$$

путања у првој и другој

$$s_{1+2} = \frac{a}{2} + \frac{3a}{2} = \frac{4a}{2} = \cdots \frac{a}{2} 2^2$$

у првим трима

$$s_{1+2+3} = \frac{a}{2} + \frac{3a}{2} + \frac{5a}{2} = \frac{9a}{2} \cdots \frac{a}{2} 3^2$$

. . . .

*) t ће бити сада свуда -1 јер тражимо путању за по једну секунду.

за свих t секунада

$$s_{1+2+3+\dots t} = \frac{a}{2} + \frac{3a}{2} + \frac{5a}{2} + \dots + \frac{(2t-1)a}{2} = \dots \frac{a}{2} t^2.$$

Према томе путања код једнако промењљивог кретања дата је овим обрасцем

$$s = \pm \frac{a t^2}{2} \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (54$$

где знак + вреди за убрзана а — за успорена кретања.

А то значи да је *пут код једнако убрзаног или једнако успореног кретања без почетне брзине раван половини производа из убрзања и квадрата времена.*

152. До тог истог обрасца можемо доћи и на овај начин. Нашли смо

$$c_1 = c_1 = \frac{o+a}{2} = \frac{a}{2}$$

$$c_{1+2} = c_{1+2} = \frac{o+2a}{2} = \frac{2a}{2}$$

$$c_{1+3} = c_{1+2+3} = \frac{o+3a}{2} = \frac{3a}{2}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$c_{1+t} = c_{1+2+\dots t} = \frac{o+ta}{2} = \frac{ta}{2} = \frac{v}{2}.$$

И кад у једначини за једнака кретања

$$s = c\,t$$

у место c и t ставимо одговарајуће њихове вредности имаћемо

$$s_1 = c_1 \times 1 = \frac{a}{2} = \frac{a}{2} \cdot 1^2$$

$$s_{1+2} = c_{1+2} \times 2 = \frac{4a}{2} = \frac{a}{2} 2^2$$

$$s_{1+2+3} = c_{1+3} \times 3 = \frac{9a}{2} = \frac{a}{2}3^2$$

. . . .

$$s_{1+2\cdots t} = c_{1+t} \times t = \frac{v}{2} = \frac{a}{2}t^2.$$

153. Општу једначину $s = \frac{at^2}{2}$ можемо променити и тако да у место времена уђе брзина v. Помножимо и једну и другу страну једначине са убрзањем a па ћемо имати

$$s\,a = \frac{1}{2}a^2t^2 = \frac{1}{2}v^2.$$

Одакле

$$s = \frac{v^2}{2a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (55$$

Исто тако

$$v = \sqrt{2as}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (56$$

и

$$a = \frac{v^2}{2s}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (57$$

154. Кад упоредимо два једнако промењива кретања међу собом, на пример кретање $s_1 = \frac{a_1 t_1^2}{2}$ и $s_2 = \frac{a_2 t_2^2}{2}$, којих су брзине $v_1 = a_1 t_1$ и $v_2 = a_2 t_2$, добићемо ове односе:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{a_1 t_1}{a_2 t_2} \quad \text{и} \quad \frac{s_1}{s_2} = \frac{a_1 t_1^2}{a_2 t_2^2} = \frac{v_1 t_1}{v_2 t_2} = \frac{v_1^2 a_2}{v_2^2 a_1}.$$

Кад ставимо $t_1 = t_2$ и све ове једначине доведемо у везу добићемо

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{a_1}{a_2}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (58$$

Кад дакле посматрамо два разна промењива кретања али за исто време, онда су њихови *путови управо сразмерни или крајњим брзинама или њиховим убрзањима.*

Ако имамо таква два кретања којих су убрзања једнака т. ј. $a_1 = a_2$ а времена разна, онда имамо овај однос

$$(59 \quad \cdots \frac{v_1}{v_2} = \frac{t_1}{t_2} \quad \text{и} \quad \frac{s_1}{s_2} = \frac{t_1^2}{t_2^2} = \frac{v_1^2}{v_2^2} \quad \cdots (60$$

У том случају, *брзине су управо сразмерне временима а путови су управо сразмерни, или квадратима времена или квадратима крајњих брзина.*

Код два кретања, којих су крајње брзине једнаке $v_1 = v_2$ а остало различно, имаћемо

$$(61 \quad \cdots \frac{a_1}{a_2} = \frac{t_2}{t_1} \quad \text{и} \quad \frac{s_1}{s_2} = \frac{t_1}{t_2} \quad \cdots (62$$

То јест, *времена су управо сразмерна путовима а изврнуто сразмерна убрзањима*,

Ако је на послетку $s_1 = s_2$ добићемо

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{v_1^2}{v_2^2} = \frac{t_2^2}{t_1^2} \quad \cdots (63$$

Што значи, да код два промењива кретања, код којих су путање исте, *убрзања су управо сразмерна квадратима крајњих брзина а изврнуто сразмерна квадратима времена.*

155. **Једнако промењиво кретање са почетном брзином.** — До сад смо посматрали случај где тело прелази у промењиво кретање из релативног мира, дакле из почетне брзине $= o$. А сад узмимо да тело има већ неку почетну брзину c па из ње прелази у једнако промењиво и то убрзано кретање. Очевидно је да ће ново стечена промењива брзина придоћи уз већ постојећу брзину тела те ће целокупна брзина, а после времена t бити

$$v = c + a t. \quad \cdots (64$$

Путању оваког промењивог кретања после времена t наћићемо, кад нађемо понаособ путању тога тела услед једнаког кретања и путању, која му припада услед промењивог кретања. Пошто смо те путање већ нашли напред, то ће целокупна путања бити:

$$s = ct + \frac{at^2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (65$$

Комбинацијом те две једначине и то таквом, да из обеју избацимо убрзање а добићемо образац у коме је пут изражен само брзином и временом:

$$s = (c + v)\frac{t}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (66$$

А ако из истих једначина избацимо време, добићемо образац за пут, изражен брзинама и убрзањем:

$$s = \frac{v^2 - c^2}{2a} = \frac{(v+c)(v-c)}{2a} \quad \ldots \quad (67$$

Одавде је још

$$v = \sqrt{c^2 + 2as} = \sqrt{2a\left(\frac{c^2}{2a} + s\right)} \quad (68$$

Ако је промењиво кретање са почетном брзином било успорено, онда ћемо истим посматрањем доћи до ових сличних једначина

$$v = c - at \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (64'$$

$$s = ct - \frac{at^2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (65'$$

$$s = (c + v)\frac{t}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (66'$$

$$s = \frac{c^2 - v^2}{2a} = \frac{(c+v)(c-v)}{2a} \quad \ldots \quad (67'$$

$$s = \sqrt{c^2 - 2as} = \sqrt{2a\left(\frac{c^2}{2a} - s\right)} \quad \cdot \quad (68'$$

156. *Примери.* — Колика је крајња брзина некога тела после 5 минута, кад се креће са убрзањем од $0{\cdot}5^m$?

$$v = 0{\cdot}5 \times 5 \times 60 = 150^m. \text{ —}$$

Једна се локомотива крене са 20^{cm} убрзања; кад ће њена крајња брзина изнети 12^m?

$$t = \frac{v}{a} = \frac{12}{0 \cdot 2} = 60. \text{ сек.} -$$

Тело се неко креће са убрзањем од 5^m, колики ће пут прећи после једног сата?

$$s = \frac{at^2}{2} = \frac{5. \times 3600^2}{2} = 32400000 \text{ мет.} -$$

Са коликим се убрзањем креће једна топовска кугла кроз топовску цев од 2 метра дужине, кад излети из топа са 700 метара брзине и колико јој је времена требало да ту брзину стече?

$$v^2 = 2\,a\,s, \quad \text{или} \quad 700^2 = 2\,a\,2;\ a = 122500 \text{ мет.}$$

Време одредићемо из

$$t = \frac{2s}{v} = \frac{2 \cdot 2}{700} = 0 \cdot 00571 = \frac{1}{175} \text{ сек.} -$$

Кад је убрзање некога тела $= 3$ m, колика му је крајња брзина кад пређе пут од 20 мет.?

$$v = 10 \cdot 95. -$$

Једна кугла крећући се једнако убрзано, пређе за 5 мин. пут од 1500 мет. колико јој је убрзање?

$$a = 0 \cdot 0333. -$$

За које ће време једно тело прећи 5000 мет. кад му је убрзање 4 мет.?

$$t = 50 \text{ сек.} -$$

У каквом су односу крајње брзине два тела, од којих се једно креће 4 сек. са $1\frac{3}{4}$ мет. убрзања а друго 10 сек. са $1\frac{1}{5}$ мет. убрзања? У каквом су односу пак њихови путови?

$$v_1 : v_2 = a_1\,t_1 : a_2\,t_2 = 7 : 12;\ s_1 : s_2 = 7 : 30. -$$

Једно је тело, убрзањем од $\frac{1}{2}$ мет. достигло крајњу брзину од 15^m; другога је убрзање $\frac{1}{3}$ м. а крајња брзина 13 м. у каквом су односу њихови путови?

$$s_1 : s_2 = 3 : 3 \cdot 645. -$$

Једна се локомотива креће неко извесно време сталном брзином од 2^m; повећањем напона паре добије она убрзање од 55 cm После ког ће времена (рачунато од почетка убрзаног кретања) прећи она пут од 150 мет.? По обрасцу

$$s = c\,t + \frac{1}{2} a\,t^2 \quad \text{имамо} \quad t = 20 \text{ сек.} -$$

Једна се локомотива креће брзином од 25 мет. Кад машиниста заустави пару и укочи точкове она губи 0·5 м. убрзања, кад ће се зауставити?

$$t = 50 \text{ сек.} -$$

Једна се тачка креће једнако успорено и пређе за прве три секунде пут од 6 мет., а за друге три сек. пут од 5 мет. Пита се: a) колико је успоравање; b) колике су почетне брзине? c) крајње брзине? d) кад ће се зауставити? e) и на којој даљини од почетка ће се зауставити?

a). Из обрасца

$$v = c - at \quad \text{имамо} \quad at = c - v.$$

Међу тим је

$$c = \frac{s_1}{t}, \quad v = \frac{s_2}{t}$$

према томе

$$at = \frac{s_1 - s_2}{t} = \frac{6-5}{3} = \frac{1}{3}; \quad a = \frac{1}{9}.$$

b). По обрасцу

$$s_1 = c_1 t - \frac{at^2}{2} \quad \text{имамо} \quad c_1 = 2\frac{1}{6} \text{ мет.}$$

у почетку кретања, а брзина c_2 почетком четврте секунде биће из обрасца

$$s_2 = c_2 t - \frac{at^2}{2}, c_2 = 1\frac{5}{6}.$$

c). Крајњу брзину v_1 одредићемо по обрасцу

$$v_1 = c_1 - at = 1\frac{1}{2} \text{ мет.}$$

d). Трајање пак из

$$t = \frac{c}{a} = 19\frac{1}{2};$$

e). Најзад пут

$$s = \frac{c^2}{2a} = 21\frac{1}{8}. -$$

Један железнички чувар угледа на 680 мет. од свог места воз где долази; па како има на 110 мет. далеко од свог места један браник да затвори, потрчи брзином од 2 метра према возу; воз пак у том тренутку наиђе брзином од 12·5 метара на малу узбрдицу, услед које губи 0·1 мет. у секунди. Ко ће стићи пре до браника чувар или воз и са коликом разликом у времену?

B. Неједнако променљиво кретање.

157. Код до сад посматраних кретања, била је или брзина или убрзање стално; ако не буде стално ни једно ни друго, већ се то непрестано мења, онда се такво кретање зове *неједнако променљиво*. И то кретање може бити убрзано или успорено.

Код неједнако променљивог кретања може бити говора само о *тренутном убрзању*, од прилике онако исто, као што се код једнако променљивог кретања говорило о брзинама за сваку поједину секунду.

Под *моментаним* или *тренутним* или *елементарним* убрзањем неког неједнако промењљивог кретања, разуме се она гранична вредност, којој се приближује размера између приращтаја брзине и времена, кад се у тој размери и приращтај брзине и време непрестано смањују. То можемо још и на овај начин да изречемо: тренутно или елементарно убрзање (α) је однос између бескрајно малог приращтаја брзине (елементарне брзине) (δ), и бескрајно малога времена (елементарног времена) (τ), за које се тај приращтај десио. Према томе имаћемо:

$$\alpha = \frac{\delta}{\tau} \quad \text{или} \quad \delta = \alpha\tau \quad \text{или} \quad \tau = \frac{\delta}{\alpha} \quad \ldots . (69$$

а то ће рећи: *тренутно је убрзање у сваком тренутку кретања равно количнику из елементарне брзине и одговарајућег елементарног времена.*

Најлакше ћемо себи овако представити тренутно убрзање: замислимо да се покретна тачка од оног тренутка за који ми тренутно убрзање тражимо, креће једнако промењљиво, дакле без икакве даље промене убрзања. И она промена брзине, која се у току тога времена деси, биће тражено убрзање. И неједнако као и једнако промењљиво кретање може бити без почетне брзине и са њом. Ми ћемо обе те врсте кретања у кратко прегледати.

158. **Неједнако промењљиво кретање без почетне брзине.** — Сводећи тако наша посматрања брзина, путова и времена са коначних вредности на бескрајно мале делове, моћи ћемо неке извесне обрасце изведене за једнако или неједнако промењљиво кретање употребити и овде код неједнако промењљивог кретања. Тако на пример образац $s = c\,t$, који смо извели за једнако кретање, вреди и за свако неједнако кретање кад у место коначне вредности за t, узмемо један времени елеменат, т. ј. један бескрајно мали делић времена τ, и кад у место коначне вредности s узмемо бескрајно мали пут σ који ће покретна тачка прећи за оно бескрајно мало време τ. Пошто ми тај времени елеменат можемо узети онолико мали колико хоћемо, ми ћемо га онда замислити да је тако мали, да се брзина, ма како се она брзо мењала није имала кад променити, него да је у току тог малог

елемента времена била стална и $= \varphi$. Са таком претпоставком, било кретање ма како неједнако промењиво, оно се за тако мали део времена може сматрати као једнако, услед чега и горњи образац за једнако кретање прелази у овај:

$$\sigma = \varphi\tau \quad \text{одакле} \quad \varphi = \frac{\sigma}{\tau} \quad \cdots\cdots \quad (70$$

који није ништа друго до образац за *елементарно* или *тренутно једнако кретање* и вреди за неједнако промењиво кретање. Из тог обрасца читамо да је *брзина неједнако промењивог кретања у сваком тренутку тога кретања, равна количнику из елементарног пута и њему одговарајућег елементарног времена.*

159. Да би могли даље проучити неједнако промењиво кретање, замислимо да је цело коначно време t састављено из n једнаких времених елемената, од којих сваки износи τ; онда је очевидно цело коначно време τ равно збиру тих елемената:

$$t = n\tau. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (71$$

У сваком том елементу времена τ, брзина је нека друга (отуда и долази да је кретање неједнако промењиво), на пример $\varphi_1\ \varphi_2\ \varphi_3 \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \varphi_n$. По себи се разуме да ће и поједини елементарни путови бити у сваком тренутку другојачи и њихове одговарајуће вредности су:

$$\sigma_1 = \varphi_1\tau, \quad \sigma_2 = \varphi_2\tau, \quad \sigma_3 = \varphi_3\tau \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \sigma_n = \varphi_n\tau.$$

Кад све те елементарне путове од 1 до n саберемо добићемо очевидно целу путању s, коју је тело прешло за све време t, дакле:

$$\begin{aligned} s &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \cdots\cdots + \sigma_n \\ &= \varphi_1\tau + \varphi_2\tau, + \varphi_3\tau + \cdots\cdots \varphi_n\tau. \\ &= (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \cdots\cdots \varphi_n)\tau. \end{aligned}$$

Ако ту једначину помножимо са $1 = \dfrac{n}{n}$ имаћемо

$$s = \left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \cdots\cdots\cdots \varphi_n}{n}\right) n\tau$$

$$= \left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \cdots\cdots\cdots \varphi_n}{n}\right) t.$$

Количник у загради није ништа друго до средња елементарна брзина φ са којом би тело прешло путању s за исти број n времених елемената τ крећући се једнако као што ју је прешло са неједнаким брзинама φ_1 φ_2 $\varphi_3 \cdots \varphi_n$. И као што у осталом видимо, ту средњу брзину добијамо код неједнако променљивог кретања кад све елементарне брзине саберемо и цео збир поделимо са њиховим бројем. Па ако ту средњу брзину неједнако променљивог кретања означимо са φ. имаћемо образац за пут

$$s = \varphi t. \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (72$$

160. Остаје нам још да одредимо време t неједнако променљивог кретања. То ћемо учинити на овај начин:

У једначини за једнако кретање нашли смо:

$$t = \frac{s}{c}.$$

За неједнако променљиво кретање знамо да је пут

$$s = n\,\sigma.$$

кад га неко тело прелази променљивим брзинама φ_1 φ_2 $\varphi_3 \cdots\cdots \varphi_n$. Према томе је

$$t = \frac{\sigma}{\varphi_1} + \frac{\sigma}{\varphi_2} + \frac{\sigma}{\varphi_3} + \cdots\cdots\cdots \frac{\sigma}{\varphi_n}$$

$$= \sigma\left(\frac{1}{\varphi_1} + \frac{1}{\varphi_2} + \frac{1}{\varphi_3} + \cdots\cdots\cdots \frac{1}{\varphi_n}\right)$$

$$= \frac{s}{n}\left(\frac{1}{\varphi_1} + \frac{1}{\varphi_2} + \frac{1}{\varphi_3} + \cdots\cdots\cdots \frac{1}{\varphi_n}\right)$$

Ове вредности променљивих брзина нису ништа друго, до реципрочна вредност средње брзине φ, т. j.

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\varphi_1}+\frac{1}{\varphi_2}+\frac{1}{\varphi_3}+\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\frac{1}{\varphi_n}\right)=\frac{1}{\varphi}.$$

па за то је најзад

$$t = \frac{s}{\varphi} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (73$$

до чега у осталом долазимо и помоћу обрасца (72.

161. **Неједнако променљиво кретање съ почетном брзином.** — Посматрајмо случај, где тело не полази из релативног мира, већ се почиње кретати неједнако променљиво са извесном сталном брзином c. Тој сталној брзини придолазиће сваког тренутка τ приraштаји (положни или одречни) у брзинама

$$\delta_1 \; \delta_2 \; \delta_3 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \cdot \delta_n$$

све док почетна брзина c не пређе у крајњу брзину φ. Услед тога је:

$$\begin{aligned}\varphi - c &= \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \cdots\cdots \delta_n \\ &= \alpha_1\tau + \alpha_2\tau + \alpha_3\tau + \cdots\cdots \alpha_n\tau \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots\cdots \alpha_n)\,\tau \\ &= \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots \alpha_n}{n}\right) n\tau \\ &= \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots \alpha_n}{n}\right) t.\end{aligned}$$

Овај израз у загради представља средње елементарно убрзање, које је у свему слично са средњом елементарном брзином φ неједнако променљивог кретања. Ако то убрзање означимо са α имаћемо

$$\varphi - c = \alpha t. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (74$$

или у опште:

$$\varphi = c \pm \alpha t. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (74'$$

Ови обрасци вреде како за једнако тако и за неједнако променљиво кретање и једина је разлика у значају убрзања a и α код једног и другог кретања. Ти обрасци вреде и за случај кад би крајња брзина била

$= o$, т. ј. кад би се покренуто тело ма којим поводом зауставило. У том је случају:

$$-c = \alpha t,$$

или

$$c = -\alpha t. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (75$$

Ако се тело креће без почетне брзине, онда је у горњем обрасцу $c = o$, а крајња брзина φ биће равна средњем убрзању помноженом са временом:

$$\varphi = \alpha t. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (76$$

(са свим слично обрасцу $v = a t$).

162. Да нађемо образац за пут неједнако промењивог кретања са почетном брзином. Тога ради означимо са σ средњу вредност појединих елементарних путања $\sigma_1\ \sigma_2\ \sigma_3 \cdots \sigma_n$ тако да можемо написати:

$$s = n\sigma$$

пошто у целом времену t има n елементарних времена τ.

Док је тачка или тело прешло тај пут s крећући се неједнако промењиво, нека је имало ова елементарна убрзања $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3 \cdots \alpha_n$. Кад свако то елементарно убрзање помножимо са средњим елементарним путем σ и саберемо, добићемо:

$$\alpha_1\sigma + \alpha_2\sigma + \alpha_3\sigma + \cdots\cdots \alpha_n\sigma.$$

Ако тај збир симболички означимо са

$\sum\limits_1^n (\alpha\sigma)$ имаћемо:

$$\sum_1^n (\alpha\sigma) = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots \alpha_n)\sigma$$

$$= \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots \alpha_n}{n}\right) n\sigma$$

$$= \alpha s. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (77$$

Почетна ће брзина c непрестаним приращтајима брзине прећи најзад у крајњу брзину φ; онда као што знамо цео приращтај брзине износи $\varphi - c$. Ако се пак та промена брзине десила у току n бескрајно малих делића времена, онда је бескрајно мали прираштај брзине у једном таквом делићу времена:

$$\delta = \frac{\varphi - c}{n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (78$$

Ти прираштаји δ док c пређе у φ овако се додају почетној брзини у појединим елементима времена:

$$c, (c+\delta), (c+2\delta), (c+3\delta), \ldots\ldots (\varphi-2\delta), (\varphi-\delta), \varphi.$$

Кад сваку ту брзину помножимо са елементарном променом брзине δ и саберемо, па збир символички означимо са $\sum\limits_c^\varphi (\varphi\,\delta)$ у коме су сви чланови почев од почетне брзине c па до крајње φ онда ће бити:

$$\begin{aligned}\sum_c^\varphi (\varphi\,\delta) &= c\,\delta + (c+\delta)\,\delta + (c+2\,\delta)\,\delta + \cdots \\ &\quad + \cdots (\varphi-2\,\delta)\,\delta + (\varphi-\delta)\,\delta + \varphi\,\delta. \\ &= [c + (c+\delta) + (c+2\,\delta) + \cdots \\ &\quad + (\varphi-2\,\delta) + (\varphi-\delta) + \varphi]\,\delta.\end{aligned}$$

У загради имамо аритметички ред, кога је први члан c а последњи φ и кога је збир

$$= \frac{n}{2}\,(c+\varphi)$$

што кад заменимо, имаћемо

$$\sum_c^\varphi (\varphi\,\delta) = (c+\varphi)\,\frac{n\delta}{2}$$

кад заменимо n из (78 биће

$$\begin{aligned}\sum_c^\varphi (\varphi\,\delta) &= \frac{(\varphi+c)\,(\varphi-c)}{2\,\delta}\cdot\delta \\ &= \frac{\varphi^2 - c^2}{2}.\end{aligned}$$

Из образаца (69 и (70 излази:

$$\delta\,\varphi = \alpha\,\sigma.$$

Кад су ти производи међу собом једнаки, онда ће и њихови збирови сваки у својим границама бити једнаки. За збир $\sum\limits_{1}^{n}(\alpha\sigma)$ имамо из обрасца (77 да је $=\alpha s$, с тога кад ту вредност ставимо место збира $\Sigma(\varphi\delta)$ имаћемо:

$$s=\frac{\varphi^2-c^2}{2\alpha}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 79$$

У тој је једначини пут неједнако променљивог кретања изражен почетном и крајњом брзином и средњим елементарним убрзањем са свим слично обрасцу (67 за једнако променљиво кретање са почетном брзином.

163. Најзад да на сличан начин одредимо и оно време t, за које, при променљивим убрзањима α_1 α_2 $\alpha_3 \cdot \cdot \cdot \cdot \alpha_n$ почетна брзина c прелази у крајњу брзину φ. За то имамо:

$$t=\frac{\delta}{\alpha_1}+\frac{\delta}{\alpha_2}+\frac{\delta}{\alpha_3}+\cdots\cdots\frac{\delta}{\alpha_n}$$

$$=\delta\left(\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\frac{1}{\alpha_3}+\cdots\cdots\frac{1}{\alpha_n}\right)$$

$$=\frac{\varphi-c}{n}\left(\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\frac{1}{\alpha_3}+\cdots\cdots\frac{1}{\alpha_n}\right)$$

кад смо δ заменили његовом вредношћу из обрасца (78.

Средње убрзање означили смо са α; овде видимо да је

$$\alpha=\frac{1}{n\left(\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\frac{1}{\alpha_3}+\cdots\cdots\frac{1}{\alpha_n}\right)}$$

па с тога је најзад:

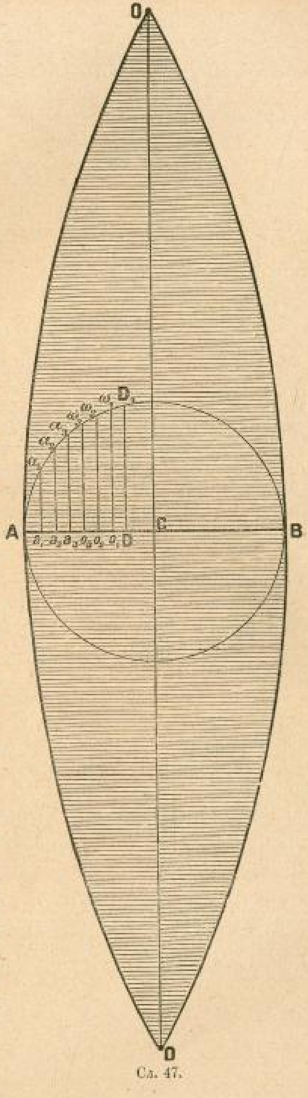
$$t=\frac{\varphi-c}{\alpha}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (80$$

До сличног обрасца долазимо и решењем једначине (64 за једнако променљиво кретање са почетном брзином.

Хармонично кретање.

164. Под *хармоничним* кретањем разуме се оно кретање, кад једна покретна тачка, изведена из свог равнотежног положаја, тежи да се у тај равнотежни положај врати па у једнаким деловима времена пролази кроз исте положаје своје путање. То се кретање зове још и *треитање*. У опште се код овог кретања покретно тело час приближује свом равнотежном положају, час прошав кроза-њ удаљава се од њега. Тако се на пример креће клатно код сата, клип код шмрка или у парном цилиндру и т. д.

Кад једну затегнуту жицу О О (сл. 47) изведемо из равнотежног положаја О С О да заузме положај О А О, онда остављена самој себи, тачка А тежиће да се врати у равнотежни положај С и кретаће се према њему убрзано. Дошав у равнотежни положај, не задржава се у њему, него услед стечене брзине иде на другу страну успореним кретањем до В, где јој је брзина равна нули и ту се заустави. Нашавши се тако изведена из равнотежног положаја, покретна се тачка истим



Сл. 47.

путем враћа кроз C у A, одавде опет натраг као и мало час и т. д. све док се услед ма каквог страног утицаја не заустави у равнотежном положају.

Покретна тачка полази из A са најмањом брзином и брзина јој расте идући ка положају C где постане највећа, међу тим убрзање јој није једнако него све више опада што се тачка приближује равнотежном положају C и ту је убрзање = o. Одавде пошав на супротну страну, тачка се креће успорено и успоравање је у толико веће у колико је тачка ближе положају D где сву своју брзину изгуби. Враћајући се натраг тачка се креће истим али супротно означеним кретањем из *B* преко *C* у *A*.

165. Један одлазак и повратак тачке, дакле цео пут од A преко C у B и из B преко C натраг у A или цео пут из C у A одавде натраг преко C у B и од B до C зове се *један трептај*; време утрошено да се цео тај пут пређе зове се *време једног трептаја*. Највећа даљина на коју се покретна тачка удали од равнотежног положаја, т. ј. даљина CA или CB зове се *амплитуда*; брзина, којом покретна тачка пролази кроз равнотежни положај, зове се *интензитет трептаја*. Ма који положај тачке на њеном путу зове се *фаза* или *мѣна трептаја*, а убрзање, које тачка има на јединици даљине од равнотежног положаја зове се *редуцирано убрзање*.

Убрзање трепереће тачке расте са остојањем од равнотежног положаја. Тако ако је редуцирано убрзање α онда је убрзање на даљини x од равнотежног положаја равно αx.

166. Да би нашли брзину трепереће тачке ма на ком остојању CD од равнотежног положаја, изражену редуцираним убрзањем α, поделимо пут AD, који је тачка прешла из A до D, на једнаке елементарне путање Aa_1, a_1a_2.... o_1 D. Ставимо CD = x, CA = r онда је пут AD = r — x. Означимо са σ дужину сваког елементарног пута, а са *n* број њихов, онда је цела дужина пута

$$AD = n\sigma = r - x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (81$$

Замислимо да је σ врло мало, онда се може узети да је убрзање за све време док тачка пролази такав један делић путање као што је σ, непроменљиво; означимо још одговарајуће брзине у тачкама:

$$\begin{array}{lllllll} & A & a_1 & a_2 & \cdots\cdots & o_2 & o_1 & D \\ \text{са:} & o, & c_1 & c_2 & \cdots\cdots & v_2 & v_1 & v \end{array}$$

онда имамо:

НА ОСТОЈАЊУ	НА ПУТУ	УБРЗАЊЕ	РАЗЛИКУ КВАДРАТА БРЗИНА ПО ОБРАСЦУ (79)
$AC = r$	$Aa_1 = \sigma$	αr	$C_1^2 - o = 2\alpha r\sigma$
$a_1C = r - \sigma$	$a_1a_2 = \sigma$	$\alpha(r-\sigma)$	$C_2^2 - C_1^2 = 2\alpha(r-\sigma)\sigma$
$a_2C = r - 2\sigma$	$a_2a_3 = \sigma$	$\alpha(r-2\sigma)$	$C_3^2 - C_2^2 = 2\alpha(r-2\sigma)\sigma$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$o_2C = x + 2\sigma$	$o_3o_2 = \sigma$	$\alpha(x+2\sigma)$	$v_2^2 - v_3^2 = 2\alpha(x+2\sigma)\sigma$
$o_1C = x + \sigma$	$o_2o_1 = \sigma$	$\alpha(x+\sigma)$	$v_1^2 - v_2^2 = 2\alpha(x+\sigma)\sigma$
$DC = x$	$o_1D = \sigma$	αx	$v^2 - v_1^2 = 2\alpha x\sigma.$

Кад све једначине последњег ступца саберемо, добијамо

$$v^2 = 2\alpha\sigma[r + (r-\sigma) + (r-2\sigma) + \cdots + (x+2\sigma) + (x+\sigma) + x]$$

Па како у загради имамо аритметички ред, кога је збир $= \frac{n}{2}(r+x)$ онда је $v^2 = 2\alpha\sigma\frac{n}{2}(r+x) = \alpha n\sigma(r+x)$.

Кад ставимо још

$$n\sigma = AD = r - x$$

имаћемо

$$v^2 = \alpha(r-x)(r+x)$$

$$= \alpha(r^2 - x^2) \quad \cdots\cdots \quad (82$$

Кад у тој једначини буде $r^2 - x^2 = o$ онда је и $v = o$, т. ј. брзина треперење тачке је онда равна нули. Али кад је $r^2 - x^2 = o$, онда је $r^2 = x^2$ и $x = \pm r$ а то значи, да покретна тачка има наизменце на једнаким али супротно означеним даљинама, од средишта C брзину нулу. Амплитуде дакле с обе стране средишта, односно равнотежног положаја јесу и остају једнаке.

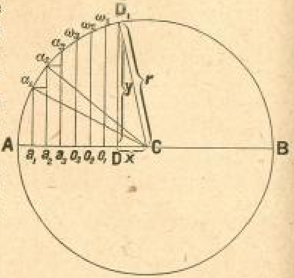
Из те једначине видимо још, да v достигне највећу вредност кад је $x = o$, јер је онда $v = \alpha r^2$ т. ј. брзина покретне тачке је највећа кад пролази кроз равнотежни положај. Ако ту максималну брзину или интензитет трептаја означимо са *c* имаћемо

$$c^2 = \alpha r^2$$

или

$$c = \pm r\sqrt{\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots (83$$

167. Брзину трепереће тачке можемо још и на овај начин да одредимо. Опишимо око равнотежног положаја C са полупречником равним амплитуди $AC = r$ један круг; саставимо $DD' = y$; означимо $CD = x$ и довршимо троугао DD_1C хипотенузом $CD_1 = r$ онда имамо, (сл. 48)



Сл. 48

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad \text{или} \quad y^2 = r^2 - x^2.$$

Кад то заменимо у обрасцу (82 добијамо још један израз за брзину трепереће тачке:

$$v^2 = \alpha y^2$$

или

$$v = y\sqrt{\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (84$$

168. Ма како било променљиво кретање трепереће тачке, ипак се може узети, да тачка сваки елементарни део путање пређе једнаком брзином; време за које тачка тај елеменат свога пута пређе одредићемо, кад сам тај пут поделимо одговарајућом брзином (види обр. (73).

Дакле: тачка ће прећи

ЕЛЕМЕНАТ ПУТА	ПРЕМА ОБРАСЦУ (84 СА БРЗИНОМ:	ЗА ВРЕМЕ:
$\overline{Aa_1}$	$\overline{a_1\alpha_1}\sqrt{\alpha}$	$\tau_1 = \overline{Aa_1} : \overline{a_1\alpha_1}\sqrt{\alpha}$
$\overline{a_1a_2}$	$\overline{a_2\alpha_2}\sqrt{\alpha}$	$\tau_2 = \overline{a_1a_2} : \overline{a_2\alpha_2}\sqrt{\alpha}$

ЕЛЕМЕНАТ ПУТА	ПРЕМА ОБРАСЦУ (84 СА БРЗИНОМ:	ЗА ВРЕМЕ:
$\overline{a_2 a_3}$	$\overline{a_3 \alpha_3} \sqrt{\alpha}$	$\tau_3 = \overline{a_2 a_3} : \overline{a_3 \alpha_3} \sqrt{\alpha}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\overline{o_1 D}$	$\overline{D_1 D} \sqrt{\alpha}$	$\tau_n = \overline{o_1 D} : \overline{D_1 D} \sqrt{\alpha}$

Збир свију елемената времена $\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 \ldots . \tau_n = t$ даће нам време за које ће потребна тачка прећи цео пут AD.

$$t = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \cdot \cdot \cdot \tau_n = \frac{\overline{A a_1}}{a_1 \alpha_1 \sqrt{\alpha}} + \frac{\overline{a_1 a_2}}{a_2 \alpha_2 \sqrt{\alpha}} +$$

$$+ \frac{\overline{a_2 a_3}}{a_3 \alpha_3 \sqrt{\alpha}} + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot + \frac{\overline{o_1 D}}{D_1 D \sqrt{\alpha}} .$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \left(\frac{\overline{A a_1}}{a_1 \alpha_1} + \frac{a_1 a_2}{a_2 \alpha_2} + \frac{a_2 a_3}{a_3 \alpha_3} + \cdot \cdot \cdot \cdot \frac{o_1 D}{D_1 D} \right).$$

Саставимо тачке α_1 α_2 $\alpha_3 \cdot \cdot \cdot \cdot$ полупречницима са средиштем C и повуцимо из тих тачака паралелне са AC, онда добијамо читав низ парова правоуглих троуглова, који су међу собом слични. Из тих сличности имамо:

$$\frac{\overline{A a_1}}{a_1 \alpha_1} = \frac{\overline{A \alpha_1}}{r}, \quad \frac{\overline{a_1 a_2}}{a_2 \alpha_2} = \frac{\overline{\alpha_1 \alpha_2}}{r}, \quad \frac{\overline{a_2 a_3}}{a_3 \alpha_3} = \frac{\overline{\alpha_2 \alpha_3}}{r} \cdot \cdot$$

$$\cdot \cdot \cdot \cdot \frac{\overline{o_1 D}}{D_1 D} = \frac{\overline{\omega_1 D_1}}{r} .$$

И кад то заменимо имаћемо:

$$t = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \left(\frac{\overline{A \alpha_1}}{r} + \frac{\overline{\alpha_1 \alpha_2}}{r} + \frac{\overline{\alpha_2 \alpha_3}}{r} + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \frac{\overline{\omega_1 D_1}}{r} \right)$$

$$= \frac{1}{r \sqrt{\alpha}} \left(\overline{A \alpha_1} + \overline{\alpha_1 \alpha_2} + \overline{\alpha_2 \alpha_3} + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \overline{\omega_1 D_1} \right)$$

$$= \frac{\widehat{AD_1}}{r\sqrt{\alpha}}.$$

Но пошто је $r\sqrt{\alpha} = c$ т. ј. интензитету трептаја (обр. (83) то је онда

$$t = \frac{\widehat{AD_1}}{c} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (85$$

За један полутрептај, т. ј. за одлазак тачке од А до В биће лук AD_1 раван полукругу, а за цео трептај, тај лук износи цео круг $= 2 r \pi$, онда ако означимо са Т трајање целог трептаја имаћемо

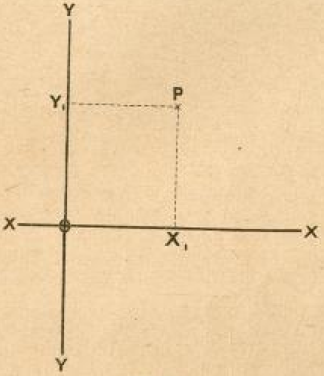
$$T = \frac{2 r \pi}{r\sqrt{\alpha}} \quad \text{или} \quad T = \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha}} \quad \ldots\ldots (86$$

Графичко представљање кретања и њихових образаца.

169. Сва кретања о којима смо до сад говорили представљали смо математичким обрасцима; међу тим могу се иста та кретања као и њихови обрасци на врло очигледан начин представити графички т. ј. помоћу геометријских слика а тиме јако олакшати схватање њихово. Али не само да се графичким представљањем кретања и њихових образаца олакшава њихово схватање, они у многоме помажу памћењу а врло често показују и погрешке, које се на први поглед у математичким обрасцима не виде. Више пута се до неког извесног резултата дође много брже графичким но рачунским путем.

170. **Геометријско или графичко представљање кретања.** — Да би ма какво кретање представили графички, ваља пре свега ону раван, на којој хоћемо кретање да нацртамо, поделити двема, једно на друго управним правим линијама на четири *поља* или *квадранта*. Те две укрштене линије зову се укупно *координатни систем у равни*, и то још *правоугли координатни систем*. Једна, обично хоризонтална линија XX (сл. 49) зове се *апсцисна оса* или *апсциса*, или просто X-оса, а вертикална YY зове се *ординатна оса* или *ордината*, или просто Y-оса. Тачка, у којој се те две осе секу зове се *почетак* (0).

Ординате, које би се повукле од апсциске осе на *више*, сматрају се као *положне*, а оне на *ниже* јесу *одречне*. Исто тако све апсцисе, повучене од ординатне осе на *десно*, јесу *положне*, а оне повучене на *лево*, *одречне су*.



Сл. 49.

Свака тачка у равни, потпуно је одређена у односу на координатни систем, кад се зна њена апсциса и ордината. А апсциса и ордината сваке тачке у равном и правоуглом координатном систему налазе се, кад се из те тачке повуку паралелне према обема осама. Комад који на *ординатној оси* одсече паралелна, повучена према апсциској оси јесте *ордината* дате тачке, а комад који на *апсцисној оси* одсече паралелна, повучена према ординатној оси, јесте, *апсциса* тачке. Обе се пак скупа зову *координате* те тачке. Тако ће за тачку P, дужина OY_1 бити ордината, а OX_1 апсциса њена; у овом је случају и апсциса и ордината положна; да је тачка P испод апсциске осе а десно од ординатне осе, онда би јој апсциса била положна, а ордината одречна. У почетку координатног система, обе су координате т. ј. и апсциса и ордината равне нули. За све тачке у X-оси, ординате су равне нули, а за све тачке у Y-оси, апсцисе су равне нули.

Пошто смо дознали својства координатних оса, онда се једно кретање може представити графички, на један од ова три начина:

1. Или ћемо просто нацртати дуж једне праве линије за једнака времена пређене путове; на тај начин добијамо само *скицу кретања.*

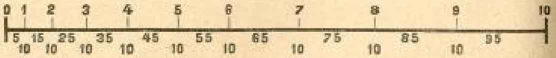
2. Или ћемо нацртати тако звану *линију путање* или просто *путању* и то на тај начин, што ћемо по једној координатној оси, на пр. по апсциси преносити времена, а по другој, т. ј. по ординатној оси преносити, за то време пређене *путове.* Тачке, које добијамо из сваког таквог појединог пара вредности, даће нам тражену путању.

3. Или ћемо нацртати тако звану *линију брзине* и то преносећи по једној координатној оси времена, а по другој, одговарајуће *брзине.* И опет, след тачака које из сваког појединог пара вредности добијамо, представљаће нам геометријски облик линије брзине. Ми ћемо редом сва три начина прегледати.

171. Скицу или шему кретања добићемо на овај начин: *а, код једнаког кретања.* Повућићемо једну праву линију и на њој ћемо, тачкама означити времена и то очевидно на једнаким даљинама, јер код такога кретања у једнаким временима пређени путови су једнаки (сл. 50).

Сл. 50.

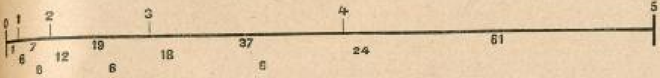
b, код једнако убрзаног или *успореног кретања.* — По правој линији, коју смо повукли као и мало час, тачкама означавамо времена онде, где се свршавају путање пређене за та времена. Овде очевидно цела линија неће бити подељена на једнаке делове као мало час,



Сл. 51.

него ће ти делови бити правилно или све већи или све мањи, како је кад кретање било убрзано или успорено, види сл. 51. По таквој би се од прилике линији шематички представило кретање једног тела које слободно пада. Иста та линија, посматрана у супротном смислу, представила би нам кретање једног тела, које се вертикално пење у вис.

с, код неједнако убрзаног кретања. — Шематичко представљање овог кретања извршило би се као и код једнако убрзаног кретања, с том само разликом што поједини одсеци не би расли једнако, већ неједнако, на пример не би ишли као бројеви 5, 15, 25, 35..... него на пример као бројеви 1 : 7 : 19 : 37 : 61 и т. д. (сл. 52).

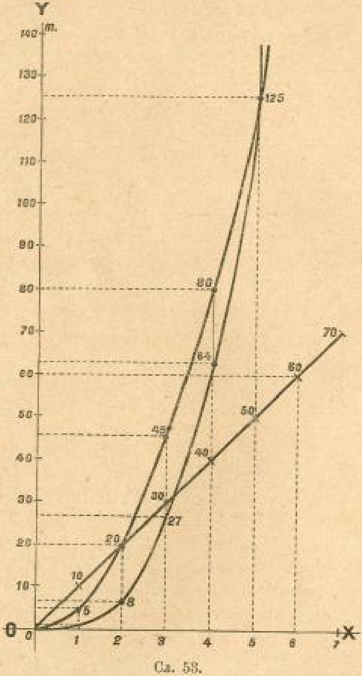


Сл. 52.

172. Путању једнога кретања конструисаћемо на овај начин:

а, код једнаког кретања. — Пошто смо повукли правоугли координатни систем, ми ћемо по апсциси преносити времена, која ће наравно бити сва једнака па за то ће и апсциса бити подељена на извесан број једнаких делова. Пошто су код једнаког кретања и путови пређени за једнака времена једнаки, ми ћемо и ординату поделити такође на извесан број једнаких делова. Узећемо да нам на апсциси дужина једног сантиметра представља једну секунду, онда ће друга секунда доћи на крају другога сантиметра и т. д. За тим можемо по ординатној оси узети да нам дужина од 1 сантим. представља путање од 1 метра, или од 10 мет., или од 1000 мет. како нам је кад згодније за цртање. Кад између сваког дела времена и одговарајућега пута, (повлачећи паралелне са координатним осама), нађемо одговарајућу тачку, онда ће нам цео низ тачака дати у овом случају једну нагнуту праву линију, која пролази кроз почетак. Њен нагиб зависиће од размере коју будемо усвојили за представљање времена по апсциској и путева по ординатној оси. Пошто ту размеру одређујемо ми сами, ми ћемо је увек тако узети, да линија буде приближно нагнута под 45°, јер је у том случају цртање најтачније.

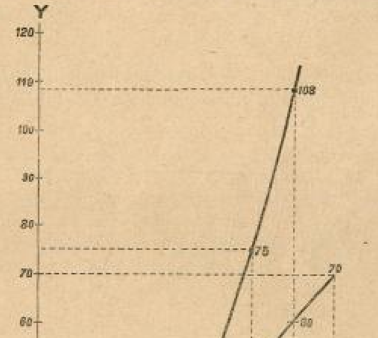
b, код једнако убрзаног кретања. — Да би нашли геометријски облик путање једнако убрзаног кретања, ваља да поступимо као код а. И сад ћемо времена преносити по оси X. По ординатној оси преносићемо сад истина неједнаке, али једнако променљиве путеве, на пример на дужинама од 0, 5, 20, 45, 80, 125 и т. д. След тачака добијених (повлачењем паралелних према координатним осама) из сваког дела времена и њему одговарајућег пута, даће нам *криву* линију као линију путање посматраног једнако убрзаног (или успореног) кретања, која такође пролази кроз почетак.



Сл. 53.

c, код неједнако убрзаног кретања. — Геометријски облик путање код овог кретања добија се на сасвим сличан начин као и под b, с том разликом, што неједнаки делови на ординатној оси, не ће расти једнако, него неједнако, и услед тога ће се та крива линија разликовати од пређашње. Пошто смо претпоставили да и ово кретање почиње из релативног мира, то ће и ова крива линија поћи из почетка координатног система. На слици 53 представљене су путање све те три врсте кретања.

173. **Брзну линију** неког извесног кретања конструишемо на сасвим исти начин, као што цртамо и његову



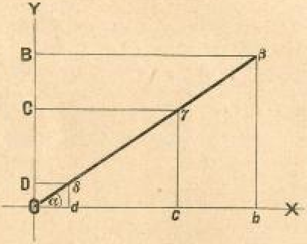
Сл. 54.

путању, с том само разликом, што ћемо по ординатној оси преносити сада брзине у место путања. Времена се и овде преносе по апсцисној оси као и у горњем случају. Брзна линија код једнаког кретања је права и хоризонтална; брзна линија једнако промењивог кретања је више или мање нагнута права а брзна линија неједнако промењивог кретања је крива линија. Све су те три линије представљене на сл. 54.

174. **Геометријско или графичко представљање образаца кретања.** Поједине обрасце кретања можемо на два начина графички да представимо: или са линијом путање или са линијом брзине. Ми ћемо оба начина показати на обрасцу за једнако кретање

$$s = c\,t.$$

a. Пренесимо по хоризонталној апсциској оси OX (сл. 55) једнака времена а по вертикалној ординатној



Сл. 55.

оси у тим временима пређене путове, и ми ћемо добити за једнако кретање једну праву линију $O\beta$ као што смо то већ и напред нашли. Ако сад $d\delta = OD$ значи пут пређен за једну секунду, а $D\delta = Od$ линијски представља прву секунду, онда ће очевидно $b\beta$ бити цео пут s, који је тело прешло крећући се све време $Ob = t$. Из сличности троуглова $Od\delta \sim Ob\beta$, имамо:

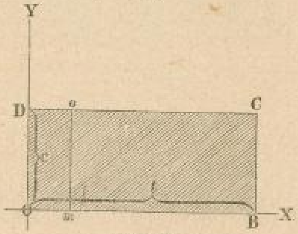
$$\frac{b\beta}{Ob} = \frac{d\delta}{Od} = \frac{s}{t}.$$

Но пошто се пут $d\delta$ који тело пређе за једну секунду зове брзина c а Od је равно јединици времена (секунди) то је

$$\frac{s}{t} = c. \qquad \text{или} \qquad s = c\,t.$$

У овом обрасцу $c = \frac{s}{t}$ брзина излази као тригонометријска тангента угла α (јер је тригон. танг. равна количнику катета). Према томе у већем или мањем успону путање, оβ можемо да распознамо већу или мању брзину са којом се тело креће, као што можемо између више таких линија путања (наравно кад су све цртане по истом размеру) одмах распознати бржа кретања (по стрменитијој путањи) од споријих, (код којих је путања положенија).

Линија путање, која би ишла паралелно са временом линијом (осом X) т. ј. која би ишла хоризонтално, дакле код које би тангента угла нагиба = о, представљала би кретање код кога је брзина нула, т. ј. мирно стање. На против линија путање, која би заклапала прав угао са временом линијом, представљала би кретање са бескрајно великом брзином. Линија, која се не би пењала, него би падала, представљала би кретање са одречним брзинама или ретроградно, назадно кретање.



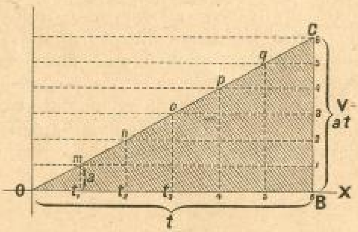
Сл. 56.

b. Ако ли горњи образац представимо графички брзном линијом, т. ј. ако по ординати пренесемо сталну брзину (а не путове) онда ћемо добити један правоугаоник, који својом површином представља цео пређени пут, јер је $c\,t$ = површини правоугаоника т. ј. = путу s. И тако можемо увек представити пут s неког једнаког кретања правоугаоником OBCD (сл. 56), коме је основица OB равна времену t а висина OD, брзини v тога кретања.

175. Да представимо графички образац за једнако променљиво кретање

$$s = \frac{a\,t^2}{2} \quad \text{или} \quad s = \frac{v\,t}{2}.$$

Као што из дефиниције променљивог кретања излази, брзина v код једнако убрзаног кретања је променљива и управо сразмерна времену t. Графички ћемо дакле представити горњи образац преносећи по апсциси времена, а по ординати промене брзине, које одговарају тим временима. Ако на крају времена $t = OB$, брзина v буде достигла вредност BC, онда ће брзна линија бити нагнута OC сл. 57, која полази из почетка јер је тамо



Сл. 57.

брзина $= o$ и пролази кроз тачке m, n, o, p..... које својим удаљењем од осе X представљају брзине у појединим секундама. Пут у првој секунди представљен је троуглом $o\,m\,t_1$; у другој секунди површином трапеза $m\,t_1\,t_2\,n$ и т. д. а цео пут на крају времена t одређен је површином троугла OBC т. ј.

$$s = \frac{1}{2}\,OB \cdot BC.$$

$$= \frac{1}{2}\,v\,t.$$

Назовимо приращтај брзине $m\,t_1$ у првој секунди са a, онда је цео приращтај после t секунада

$$= CB \quad \text{или} \quad v = at$$

што кад заменимо добијамо

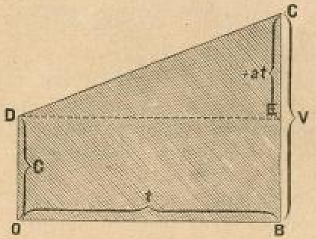
$$s = \frac{at^2}{2}.$$

По себи се разуме, да се горњом сликом може представити и једнако успорено кретање, кад само троугао OCB око катете CB као око осовине окренемо за 180°.

176. Кад слику 57 насликамо изнад правоугаоника за једнако кретање (сл. 56), добићемо графички представљен образац за једнако убрзано кретање са почетном брзином т. ј.

$$s = ct + \frac{1}{2}at^2,$$

јер је пут код такога кретања представљен површином трапеза DOBC (сл. 58). Па како је површина трапеза



Сл. 58.

равна половини збира обе паралелне стране помноженој висином то је

$$F = OB \cdot \frac{1}{2}(OD + BC)$$

или

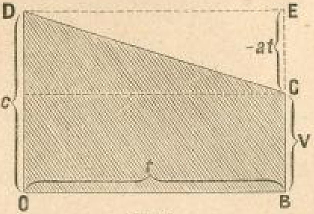
$$s = t \cdot \frac{1}{2}(c + v).$$

Ако ставимо промену брзине $\overline{CE} = at$ онда је површина трапеза равна површини правоугаоника ct, plus површини троугла $t \cdot \frac{1}{2} at$ дакле

$$s = ct + \frac{at^2}{2}.$$

Сл. 59, представља графички образац за једнако успорено кретање са почетном брзином т. ј.

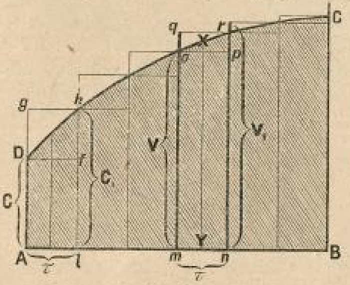
$$s = ct - \frac{1}{2} at^2.$$



Сл. 59.

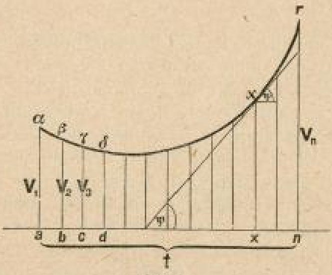
177. Код досадањих графичких представљања математичких образаца, брзне су линије биле праве, и површине које су одговарале појединим путовима, ограничене су биле правим линијама. Да видимо сад како се дају графички представити и они обрасци, који представљају кретања којих брзне линије или линије путања нису праве већ криве

Док код једнаког кретања брзина mo, (сл. 56) за све време кретања остаје непроменљива и стална, код променљивог кретања је она сваког тренутка друга, и док је код једнаког кретања брзна линија паралелна са временом линијом (X-осом), геометријски облик брзне линије код променљивог кретања мора такав бити, да ни једним својим делом не тече паралелно са временом линијом. Замислимо да је цело трајање кретања АВ (сл. 60) на врло велики број ситних делића подељено и испитајмо најпре кретање за време једног таквог делића времена, $\tau = mn$; ми ћемо наћи да је за тај времени делић τ, брзина v порасла од mo на nr. Кад би брзина v за све време τ остала равна mo, онда би површина правоугаоника $on = \tau v$ представљала пређени пут за време τ. На против кад би брзина још у почетку времена τ била $v_1 = nr$, онда би правоугаоник $qn = \tau v_1$ представљао тај пут. Прави дакле пут мора бити већи од on, али мањи од qn и свакако одговара производу $XY \cdot mn$ где XY представља средњу брзину у току вре-



Сл. 60.

меног делића τ. Из истог је разлога правоугаоник $Af = \tau c$ мањи а правоугаоник $gl = \tau c_1$ већи од истински пређеног пута. Обе ове границе леже у толико ближе, у колико је мањи времени делић τ.



Сл. 61.

Исто се посматрање даје применити и на остале времене елементе, па се према томе цео пређени пут може сматрати као збир елементарних правоугаоника, од којих сваки има за основицу времени делић τ, а за висину ону средњу брзину, која постаје у току тог временог делића. И тако се и код неједнаког кретања пут s мери садржином површине слике $ABCD$ којој је основица време t а која је са осталих страна ограничена почетном брзином AD, крајњом брзином BC и кривом брзном линијом CD.

У сл. 61 имамо такође криву брзну линију, променљивог кретања, кога је пут представљен површином $s\alpha r n$. Као што се из те слике види, брзина од почетка α до δ опада, за тим у оба идућа делића времена остаје готово непромењена, па онда све до r најпре полако па онда нагло расте. Замислимо сад цело време t разложено на n једнаких бескрајно ситних времених делића $ab = cd = \tau$, и одговарајуће неједнаке брзине означене са v_1 v_2 $v_3 \cdots v_n$, онда је цела површина $an r \alpha$, која одговара целом путу s дата оваким збиром:

$$
\begin{aligned}
s &= ab \cdot v_1 + bc v_2 + cd \cdot v_3 + \cdots \cdots \\
&= \tau v_1 + \tau v_2 + \tau v_3 + \cdots \cdots \cdots \tau v_n \\
&= (v_1 + v_2 + v_3 + \cdots v_n) \tau \cdots \cdots \\
&= \left(\frac{v_1 + v_2 + v_3 + \cdots \cdots v_n}{n} \right) n \tau \\
&= v_0 \cdot t.
\end{aligned}
$$

где v_0 значи средњу брзину из свију појединих променљивих брзина. Такав смо образац већ нашли и код неједнако промењљивог кретања (образац 72).

178. Као год што се код недједнаког кретања сваког тренутка мења брзина по величини, исто се тако мења сваког тренутка и правац брзне линије према X-оси; тај је правац увек одређен геометријском тангентом, повученом на одговарајућу тачку брзне линије. Та тангента представља у исти мах и путању оног кретања, у које би промењљиво кретање прешло, кад би у том тренутку престали узроци, који кретање мењају. У колико је већи угао ψ, који заклапа геометријска тангента повучена у ма којој тачки брзне линије, са осом X, у толико је већи прираштај брзине; кад буде $\psi = 90$, убрзање је бескрајно велико.

Убрзање кретања мери се тригонометријском тангентом угла нагнућа, који заклапа геометријска тангента, повучена на брзну линију, са X-осом. На сл. 61 убрзање у тренутку x дато је величином *tang.* ψ.

Говорећи у опште, могу се ова четири елемента: *време*, *пут*, *брзина* и *убрзање* ма каквом равном кривом линијом (α r) представити. Време t представља се апсцисом ($\overline{a n} = t$); брзина (v_n), ординатом ($\overline{n r} = y$); пређени пут површином ($a \alpha r n = s$) између почетне брзине ($a \alpha = v_1$) и крајње ($n r = v_n$); најзад убрзање, тригонометријском тангентом онога угла, који заклапа са X-осом геометријска тангента, повучена на брзну линију, и у посматраној тачки ($tg\ \psi$, за тачку $\varkappa$).

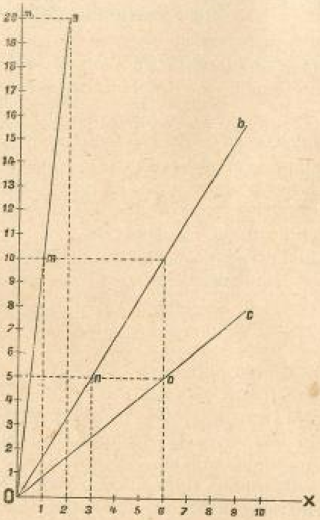
Исто тако, из положаја брзне линије према апсциској оси XX може се одредити природа самога кретања. Догод се брзна линија на положној страни осе XX *удаљава* од ње, дотле је кретање *убрзано*, кад јој се *приближује* онда је кретање *успорено*. Ако је у првом случају, *испупчена* страна линије окренута оси XX, кретање остаје на свагда *убрзано*; ако је у истом случају (т. ј. кад се брзна линија удаљава од XX) њена *издубљена* страна окренута тој оси XX, онда ће то кретање само до некле бити убрзано, па мора прећи у успорено. У оном случају, где се брзна линија приближава оси XX, па јој је *издубљена* страна окренута тој оси, кретање остаје непрестано *успорено*, а кад јој је *испупчена* страна окренута оси, оно може да пређе из успореног у убрзано. То вреди за положни квадрант, где је и x и y положно. Лако је увидити, како ће ствар изгледати у осталим квадрантима.

Кад год брзна линија *сече* осу XX, увек је *брзина* равна нули; кад год брзна линија иде *паралелно* са осом XX *убрзање* је равно нули.

Ако брзна линија изгледа таласасто, онда она представља кретање час убрзано час успорено, јер се кривине брзне линије периодички мењају. Она представља у исти мах и општи изглед једног хармоничног кретања.

179. *Примери.* — 1. Један железнички воз, пролази 18 километара за по сата; један коњ 24 км. за 4 сата, и један сплав на каквој реци спусти се за 3 минута 150 мет. низ воду. Да се сва та три кретања представе

геометријски и то а) шематички, b) линијом путање и c) брзном линијом.



Сл. 62.

Брзина железничког воза износи према задатку,

$$c_1 = \frac{18.1000}{30.60} = 10^m.$$

Брзина коња,

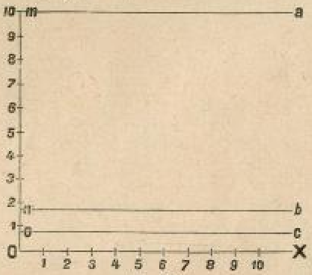
$$c_2 = \frac{24.1000}{4.60.60} = 1^2/_3{}^m.$$

Брзина сплава,

$$c_3 = \frac{150}{3.60} = \frac{5}{6} \text{ m}.$$

Дакле док воз пројђе 10 метара у једној секунди, дотле ће коњ прећи исти пут за 6 сек. а сплав за 12 сек. (сл. 62).

Из слика 62 и 63 види се како изгледају иста кретања представљена путањама и брзним линијама. Као што смо и напред напоменули, углови нагнућа путања према оси XX у толико су већи у колико је кретање брже. Међу тим све су три брзне линије паралелне са осом XX, само различито од ње удаљене, према бројној вредности одговарајуће брзине.



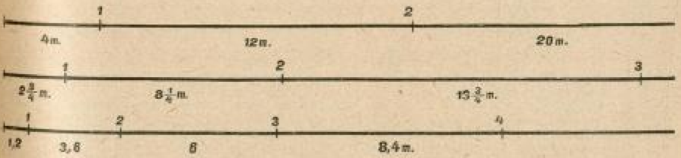
Сл. 63.

2. Три тела крећу се једнако убрзано и то једно са 8, друго са 5·5 а треће са 2·4^m убрзања. Конструисати им шематички преглед, линије путање и брзне линије. — По обрасцу $s = \frac{a\,t^2}{2}$ одговарајући путови за прву секунду су 4, $2^3/_4$ и 1·2^m. У идућим секундама биће путови:

$1 \times 4, \quad 3 \times 4, \quad 5 \times 4, \quad 7 \times 4 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$

$1 \times 2^3/_4, \quad 3 \times 2^3/_4, \quad 5 \times 2^3/_4, \quad 7 \times 2^3/_4 \cdot \cdot \cdot \cdot$

$1 \times 1{\cdot}2, \quad 3 \times 1{\cdot}2, \quad 5 \times 1{\cdot}2, \quad 7 \times 1{\cdot}2 \cdot \cdot \cdot \cdot$

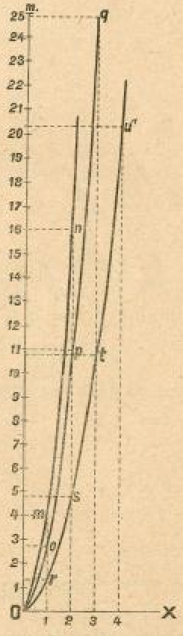


Сл. 64.

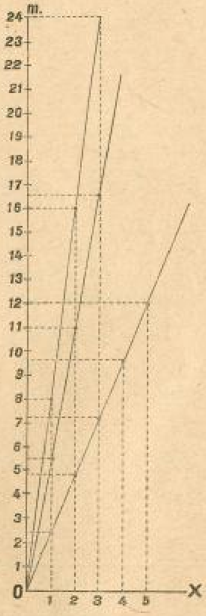
Шематички нацрти путање и брзине линије виде се на сликама 64, 65 и 66. Линије путање конструисаћемо на пример за друго тело кад одредимо пут за једну, две, три и т. д. секунде. Ти су путови:

$$1\times2\frac{3}{4};\quad 4\times2\frac{3}{4};\quad 9\times2\frac{3}{4}\;\ldots\ldots\ldots$$

Брзине линије конструисаћемо кад најпре одредимо брзине по обрасцу $v = at$, и њих преносимо по ординатној оси.



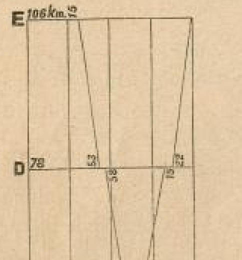
Сл. 65.



Сл. 66.

3. Конструјисати геометријски план два железничка воза од којих један полази у $6^{\text{сата}}$ $15^{\text{мин.}}$ из A за E, а

други полази у исто време из *E* за *A*. Између *A* и *E* налазе се станице *B*, *C*, *D* а њихова су остојања A—B=21, B—C=27, C—D=30, и D—E=28 km. Воз, који полази из *A* стиже у *B* у $6^{\text{с.}}\ 43^{\text{м.}}$, и ту се задржава 2 мин.; полази из станице *C* пошто се у њој задржао 11 минута, у $7^{\text{с.}}$ и $37^{\text{м.}}$, стиже у *D* у $8^{\text{с.}}\ 15^{\text{м.}}$, и пошто се ту задржи 7 мин. полази за *E* где стиже у $9^{\text{с.}}$. Воз који полази из *E*, стиже у $6^{\text{с.}}\ 53^{\text{м.}}$ у *D*, полази у $6^{\text{с.}}\ 58^{\text{м.}}$ и стиже у *C* у $7^{\text{с.}}\ 34^{\text{м.}}$; полази у $7^{\text{с.}}\ 45^{\text{м.}}$ за *B* и тамо стиже у $8^{\text{с.}}\ 26^{\text{м.}}$ па пошто се задржи 2 мин. полази за *A* где стиже у $8^{\text{с.}}\ 56^{\text{м.}}$. — Код овог ћемо задатка времена изражена у сатима пренети по оси *X* а путове у километрима по оси *Y*. Сл. 67 показује нам тражени план. Као што се из плана види, возови се укрштају на станици *C*; један воз долази у *C* у $7^{\text{с.}}\ 26^{\text{м.}}$ а с друге стране стиже воз у $7^{\text{с.}}\ 34^{\text{м.}}$. После три минута полази први воз за *E*.



Сл. 67.

Овакви графички планови железничких возова су много прегледнији од обичних, а нарочито кад је број возова и у једном и у другом правцу велики. Кад се код овакога цртања узме *минут* за јединицу времена а *километар* за јединицу дужине, онда тангента нагибног угла одговарајуће линије даје брзину у километрима и за минут. Да би то показали, посматрајмо кретање првога воза од станице *A* до *D*; оно је представљено на сл. 68. Времена су пренесена на *X* оси сваких 5 минута а остојања по *Y*-оси сваких 5 килом.

Пошто је a b = 21 км; A b = $28^{\text{мин.}}$ то је

$$c_1 = \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{21}{28} = 0{\cdot}75 \text{ км. на мин.}$$

$$= \frac{750}{60} = 12{\cdot}5 \text{ мет. у сек.}$$

Даље је: $df = 48 - 21 = 27$

$cf = 86 - 45 = 41$

па дакле

$$c_2 = \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{27}{41} \text{ км. на минут}$$

$$= \frac{27.1000}{41.60} = 11 \text{ м. у сек.}$$

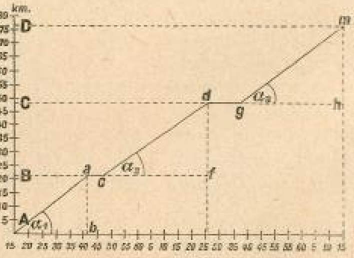
Најзад: $hm = 78 - 48 = 30$

$gh = 75 - 37 = 38$

према томе

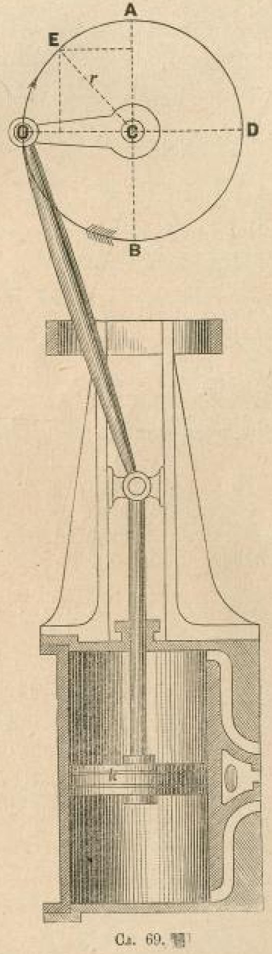
$$c_3 = \operatorname{tg} \alpha_3 = \frac{30}{38} \text{ км. на мин.}$$

$$= \frac{30.1000}{38.60} = 13 \text{ м. у сек.}$$



Сл. 68.

4. Дат је парни цилиндар са својим клипом; полуга CO, утврђена за осовину парне машине има 36 cm. и окрене се 100 пута у минуту. Ваља одредити средњу брзину зглавка O, средњу брзину клипа k, као и пут



Сл. 69.

који он изврши кад се горња полуга CO за 180° окрене. За тим ваља круг, који описује полуга CO поделити на 36 делова од по 10° сваки, и за сваку, тако добивену тачку, израчунати одговарајући пут парног клипа h; најзад ваља кретање клипа представити графички и доказати, да обрасци 84, 85 и 86, које смо нашли код простог хармоничног кретања, вреде и за ово кретање.

Док се полуга CO окреће по кругу $OADB$ (сл. 69) једнаком брзином, креће се за њу утврђени клип парног цилиндра сасвим промењљиво и тако, да је његова брзина најмања, управо равна нули онда, кад полуга достигне своју највишу и најнижу тачку A и B. На против клип се најбрже креће онда кад је заглавак O на половини висине својега пута т. ј. у тачкама O и D, и онда је његова брзина, равна брзини c саме полуге. Док се полуга креће од B до O, брзина клипа расте од нуле до c; на путу од O до A, његова брзина опадне од c до нуле; на путу од A до D брзина клипа опет порасте од нуле до c да опет опадне на нулу, кад зглавак дође у В.

Означимо полупречник круга т. ј. дужину полуге

$OC = EC = r$; зглавак O окрене се једнако (или скоро једнако) за неко извесно време T, по кругу, кога је обим $2r\pi$, док на против, свака тачка клипа пређе за исто време T, прави пут $BA = 2r$, један пут на више и један пут на ниже. Према томе одредићемо средњу брзину c_c клипа k, кад цео његов пут $BA = 2r$ поделимо временом t_1 за које се полуга у пола обрне т. ј.

$$c_c = \frac{2r}{t_1} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (A$$

Пошто се према задатку полуга окрене 100 пута у минуту, то је време једног обрта

$$T = \frac{60}{100} = 0{\cdot}6 \text{ сек.}$$

па према томе и време половине обрта

$$t_1 = 0{\cdot}3 \text{ сек.}$$

Заменимо све бројне вредности у горњи образац A па ћемо имати средњу брзину клипа

$$c_c = \frac{2 \times 0{\cdot}36}{0{\cdot}3} = 2{\cdot}4^m.$$

Сама полуга за то време опише половину круга, дакле пут од πr па је с тога њена брзина

$$c = \frac{\pi r}{t_1} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (B$$

или замењено бројним вредностима

$$c = \frac{3{\cdot}14 \times 0{\cdot}36}{0{\cdot}3} = 3{\cdot}768^m.$$

Кад сравнимо обе вредности (A и (B добијамо однос:

$$c_c : c = \frac{2r}{t_1} : \frac{\pi r}{t_1},$$

или

$$c_c : c = 2 : \pi,$$

или

$$c_c = \frac{2c}{\pi},$$

или најзад

$$c_e = 0{\cdot}6366\ c \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (C$$

то ће рећи, средња брзина c_e клипа износи 0·6366 део од непромењиве брзине c, полуге.

Оба ова кретања, кружно и праволинијско тако су међу собом спојена, да док једна тачка a (сл. 70) кружне путање пролази за једнака времена једнаке лучне дужине ab, bc, cd и т. д. дотле тачка O на клипу прелази за иста времена праве путове $O1$, $1{,}2$; $2{,}3$ и т. д. Ако је дакле зглавак полуге, пошав из свог средњег положаја a, прешао за време t пут $a d = r\beta = c t$, који одговара углу $a O d = \beta$ (за који се полуга обрнула, и то са непромењивом брзином c), онда је за полугу утврђени клип прешао пут

$$s = OM = dN.$$

Пошто је

$$\frac{dN}{r} = \sin\beta$$

то је

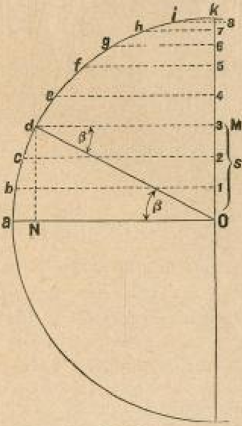
$$s = r \sin\beta. \quad \cdots\cdots \quad (D$$

или пошто је још

$$\beta = \frac{ct}{r},$$

то је и

$$s = r \sin\left(\frac{ct}{r}\right).$$



Сл. 70.

Ако је сад угао $\beta = 10°$, онда је

$$s_1 = 0{,}1 = 0{\cdot}36 \sin 10°$$

за угао $\beta = 20°$

$$s_2 = 0{,}2 = 0{\cdot}36 \sin 20°$$

за угао $\beta = 30°$

$$s_3 = 0{,}3 = 0{\cdot}36 \sin 30° \quad \text{и т. д.}$$

Кад тако поступимо за свих девет углова у првом квадранту и одредимо бројне вредности одговарајућих синуса углова, добијамо овај табеларни преглед:

ПУТ ЗГЛАВКА ПОЛУГЕ	β	ПУТ КЛИПА	У СВАКОМ ДЕЛУ ВРЕМЕНА ПРЕЂЕНИ ПУТ КЛИПА
од a до b = 6·28 cm	10°	$s_1=0-1=6\cdot25$ cm	6·25 cm.
„ a „ c = 12·56 „	20°	$s_2=0-2=12\cdot31$ „	6·06 „
„ a „ d = 18·84 „	30°	$s_3=0-3=18\cdot00$ „	5·69 „
„ a „ e = 25·12 „	40°	$s_4=0-4=23\cdot14$ „	5·14 „
„ a „ f = 31·40 „	50°	$s_5=0-5=27\cdot58$ „	4·44 „
„ a „ g = 37·68 „	60°	$s_6=0-6=31\cdot18$ „	3·60 „
„ a „ h = 43·96 „	70°	$s_7=0-7=33\cdot97$ „	2·79 „
„ a „ i = 50·24 „	80°	$s_8=0-8=35\cdot45$ „	1·48 „
„ a „ k = 56·52 „	90°	$s_9=0-9=36\cdot00$ „	0·55 „

Примедба. Брзину зглавка полуге нашли смо $=3\cdot768$ м. у секунди. Пошто се полуга окрене један пут за 0·6 сек. то ће време за које ће зглавак прелазити луке *ab*, *bc*, *cd* и т. д. који одговарају угловима од 10° бити

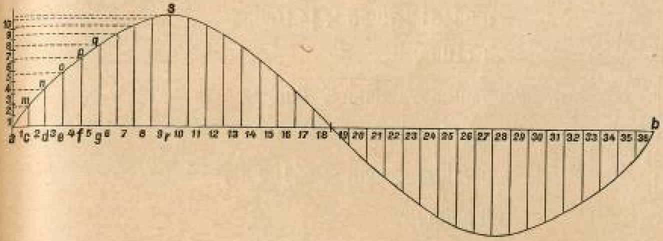
$$\tau = 0\cdot6 \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{60} \text{ сек.}$$

то дакле и пут

$$ab = \frac{3\cdot768}{60} = 6\cdot28 \text{ cm.}$$

Из горње се таблице јасно види, како је пут клипа у првом делићу времена, т. ј. за прво $\tau = \frac{1}{60}$ сек. готово онолики колики је и пут зглавка полуге, и како доцније све више и више опада.

Да би нацртали *линију брзине* кретања клипа, замислимо да смо кружни обим $2\,r\,\pi$ развили у праву линију (сл. 71) и да смо је као линију времена, поделили на n, овде дакле на 36 једнаких делова; сваки тај део раван је $\frac{1}{60}$ секунде. Изнад тако добијених тачака a, c, d, e, f... ваља управно подићи синусе, који одговарају временим луцима ac, cd, de..... Ако смо дакле линију ab нацртали управо толику, да одговара обиму круга, кога је полупречник Ok (сл. 69), онда треба да подигнемо у тачки r управну, дужине полупречника aO те да буде $\overline{rs} = \overline{aO} = r$ и да пренесемо синусима одговарајуће линије $b1$, $c,2$ $d,3$..... (из сл. 70) лево и десно од rs (сл. 71). Најзад кад са-



Сл. 71.

ставимо крајње тачке тих управних једном непрекидном линијом, добијамо за кретање клипа једну криву линију, која се таласасто изнад времене линије издиже, пресеца је у средини, и за силажење клипа, таласасто се испод ње савија.

Остаје нам још да докажемо да се обрасци изведени за просто хармонично кретање дају применити овде. Тога ради прорачунајмо тако звано редуцирано убрзање које је, као што се из обрасца (83 види:

$$\alpha = \frac{c^2}{r^2}.$$

У нашем примеру је $c = 3{\cdot}768$, а $r = 36$ cm. па је онда

$$\alpha = \frac{3{\cdot}768^2}{0{\cdot}36} = 109{\cdot}55^m.$$

То значи, да би убрзање на 1 метар од средишта било $= 109\cdot55$ м.

Према обрасцу (84, брзина трепререћег тела, ма у којој тачки његовога пута износи:

$$v = y\sqrt{\alpha}$$

где y значи полутетиву повучену из одговарајуће тачке управно на правац кретања. Ако би хтели помоћу тог обрасца да одредимо брзину клипа у тачкама 1, 2, 3,..... његовога пута Ok (сл. 70) то значи у тренутцима кад је полуга скренула из хоризонталног положаја за 10°, 20°, 30°.... онда налазимо, да је секундна брзина у тачки 1:

$$\begin{aligned} v_1 &= \sin(90-10)^\circ \cdot r \cdot \sqrt{\alpha} \\ &= 0\cdot98481 \times 0\cdot36 \times \sqrt{109\cdot55} \\ &= 3\cdot7108 \text{ м.} \end{aligned}$$

Брзина клипа у тачки 2 биће:

$$\begin{aligned} v_2 &= \sin(90-20)^\circ \cdot r \cdot \sqrt{\alpha} \\ &= 0\cdot94361 \times 0\cdot36 \times \sqrt{109\cdot55} \\ &= 3\cdot5555 \text{ м.} \end{aligned}$$

Брзина у тачки 3 биће:

$$\begin{aligned} v_3 &= \sin(90-30)^\circ \cdot v \cdot \sqrt{\alpha} \\ &= 0\cdot86603 \times 0\cdot36 \times \sqrt{109\cdot55} \\ &= 3\cdot2632 \text{ м.} \end{aligned}$$

и тако даље

До истих ћемо вредности доћи краћим путем, кад помислимо, да је брзина клипа у тачки O, равна брзини зглавка у тачки a, (сл. 70) и да је та брзина

$$v = c = 3\cdot768$$

да је даље брзина клипа у тачки 1 равна производу из средње брзине c и, полутетиви $b1$ одговарајућег синуса, т. ј. да је у тачки 1 брзина клипа:

$$v_1 = c \sin 80^\circ$$

у тачки 2 $\quad v_2 = c \sin 70^\circ$

у тачки 3 $\quad v_3 = c \sin 60^\circ$

На тај начин добијамо

$$v_1 = 3{\cdot}768 \times 0{\cdot}98481$$

$$v_2 = 3{\cdot}768 \times 0{\cdot}94361$$

$$v_3 = 3{\cdot}768 \times 0{\cdot}86603 \text{ и т. д.}$$

или $\quad v_1 = 3{\cdot}7108, \quad v_2 = 3{\cdot}5555, \quad v_3 = 3{\cdot}2632.$

Истим путем добијамо:

$v_4 = 2{\cdot}88, \quad v_5 = 2{\cdot}42, \quad v_6 = 1{\cdot}88, \quad v_7 = 1{\cdot}29, \quad v_8 = 0{\cdot}65.$

Ако означимо са T време за које клип сврши свој пут тамо и амо, онда имамо према обрасцу (86

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{a}},$$

или кад одговарајуће вредности заменимо

$$T = \frac{2.3{\cdot}14159}{\sqrt{109{\cdot}55}} = 0{\cdot}6 \text{ секунде.}$$

као што смо већ нашли и из обрасца *A*.

ДЕО ЧЕТВРТИ

СИЛА, РАД И ЕНЕРГИЈА

180. У самом почетку видели смо, да су материја и кретање једини састојци природе. За тим смо из ближе проучили сваки тај природни састојак посебице; дознали смо какве су опште особине материје и све оно што је с тим у вези; онда смо видели какве су опште особине кретања и упознали се са разним главнијим врстама кретања и то са чисто геометријског гледишта и не водећи рачуна о материји, која управо то кретање врши.

Сад ћемо да проучимо материју и кретање заједно т. ј. онако, како их зајиста у природи налазимо.

I. СИЛА

О сили у опште.

181. **Количина кретања, количина убрзања.** — Количина материје у некоме телу, представљена је потпуно својом *масом* m, и по томе, колика је маса покретног тела, судићемо и о бројној *величини* саме *материје*

Величина кретања пак одређена је брзином. Ако је кретање једнако, онда о његовој величини судимо по сталној брзини c, а ако је кретање променљиво, онда о величини тога кретања и у извесном тренутку, судимо по брзини v коју тело има у посматраном тренутку. Но како променљива брзина v зависи од убрзања, то ћемо имати прави појам о величини променљивог кретања кад будемо водили рачуна о промени брзине у јединици времена, т. ј. о убрзању a.

Кад се креће нека маса m, као што то у самој ствари бива, онда о *количини кретања* те масе судимо у исти мах и по количини материје, која се креће и по величини брзине, са којом се та материја или маса креће. Једна гвоздена и једна дрвена кугла исте величине ма да се крећу истим брзинама не ће имати исту количину кретања, јер исто толика гвоздена кугла има више масе но дрвена. Обратно, ако су масе два тела једнаке, онда ће количина кретања бити већа код онога тела које се креће брже. Из тога следује, да се *количина кретања мери производом из масе и брзине.*

Изучавајући разне врсте кретања, ми смо се упознали и са разним врстама брзина, па према томе имаћемо и разних врста количина кретања. Ако је кретање једнако, дакле ако је његова брзина стална, c, онда ће његова количина кретења бити mc, и остаће за све време кретања стална. На против, ако се тело креће промењивом брзином v, онда ће количина кретања бити изражена производом mv, и биће исто онако промењива као и брзина.

Производ из масе и брзине било сталне било промењиве, дакле количину кретања неки писци називају: *величином кретања, множином кретања* или још и *покретним моментом* или *моментом кретања.*

182. Промењивост промењиве брзине v зависи од убрзања a па према томе и промењивост количине кретања код промењивог кретања зависиће у крајњој мери од *количине убрзања* ma.

Овај последњи производ ma, има за нас особиту важност, па за то ћемо се код њега мало дуже задржати.

Кад се брзина некога тела промени у једној секунди за убрзање a, онда је количина целе промене кретања $= ma$. Услед постојаности, као опште особине кретања, тело није могло само собом изменити своје кретање, него му је та промена морала доћи ма с које стране и услед другог неког кретања. Страно тело, које је посматраној маси m променило кретање, т. ј. саопштило му неко извесно убрзање и изазвало промену кретања за количину убрзања $= ma$, морало је исто толико изгубити од свог кретања; јер у колико је маса m на кретању добила, толико је оно страно тело морало изгубити. *И та количина убрзања* ma, *која се с једног тела* *преноси на друго и која једина изазива промене код свију кретања у природи, зове се* **сила.**

183. Према томе, као што смо већ и напред видели, сила није нешто особито, засебно и одвојено у природи, силом називамо онај узрок који је у стању да измени неко кретање (не да га створи, јер кретање већ постоји) а пошто се кретање мења једино променом убрзања, која се промена мери количином убрзања, то следује, да је свакој сили задатак да промени убрзање и обратно, свако убрзање може да промени само сила, т. ј. опет нека друга количина убрзања. С тога ако силу означимо један пут за свагда са P, она ће бити

$$P = ma \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (87$$

одакле одмах имамо

$$88) \cdot \cdot \cdot \cdot a = \frac{P}{m} \quad \text{и} \quad m \frac{P}{a} \cdot \cdot \cdot \cdot (89$$

У обичном се животу чује врло често реч „сила“, а и ми ћемо се често њоме служити. Само под „силом“ ваља увек разумети количину убрзања пренесенога или изазванога или у опште промењенога кретања. Реч „сила“ даје се врло згодно употребити нарочито онда, кад не знамо или кад нам није потребно да знамо праву количину убрзања па да њу узмемо у место „силе“.

184. Да објаснимо „силу“ једним примером. Имамо два тела A и B. Тело A, кога је маса $m_1 = 2$, креће се једнаком брзином од 2 метра. Дакле $c = 2$ и количина тога једнаког кретања јесте $m_1 c = 4$. Тело B креће се промењиво и то једнако промењиво тако, да му је брзина у почетку $= 1$ метар и да му за тим брзина расте сваке секунде са по $0{\cdot}2^m$; убрзање је дакле $a = 0{\cdot}2$. Ако узмемо да је маса тела B, $m_2 = 3$, онда је количина убрзања $m_2 a = 0{\cdot}6$.

Кад би овде, код тела B хтели да знамо количину кретања, т. ј. mv, онда би ваљало одредити и у којој секунди? — У петој секунди биће $m_2 v = 5{\cdot}4$ у једанајестој 9 и т. д.

Нека тело B, после 15 секунада, стигне тело A, судари се с њим и том му приликом преда трећину свога кретања. У тренутку судара, количина кретања тела B износи 12, и кад се трећина од тога пренесе са В на А, т. ј. 4, онда ће у првој секунди после судара, количина кретања тела А бити равна суми обеју т. ј. $=4+4=8$. Па како смо ми онај узрок који може да промени кретање назвали „силом", то је у овом случају сила $P=4$. И пошто се промена кретања врши само променом убрзања, онда је и првобитна брзина тела А од 2 метра увећана убрзањем 2^m, јер је пренесена количина убрзања $=4$ (а маса тела А је $=2$).

У место да тако уђемо у саму природу промене кретања на телу А, ми би се обично изразили: нека сила Р саопштила је телу А брзину од 2^m или нека сила Р променила је кретање тела А за 2^m.

185. У том примеру, сила је дејствовала само једнога тренутка, (за време судара) па је престала; такве се силе зову *моментане* или *тренутне* силе. Све су силе тренутне које долазе услед судара, експлозије барута или праскајућег гаса и других сличних дејстава. Међу тим може једна сила дуже време да дејствује и да непрестано и сваке секунде изазива нова убрзања; такве се силе зову *трајне, непрекидне* или *континуирне*, на пример привлачна сила земље, магнета, или електрицитета и т. д.

Трајне се силе даље деле на *сталне, постојане* или *константне*, и на *променљиве*. Ако је трајна сила стална, по себи се разуме да ће и промене које буде изазвала бити сталне и једнаке.

Да ли ће на неко тело дејствовати тренутна или трајна сила, последице не ће бити исте; мало доцније упознаћемо се опширније са тим последицама.

186. Ако силе дејствују тако да повећају брзину покретног тела, онда се зову *положне, радне* или *покретне* силе; ако пак силе смањују брзину, дакле ако успоравају кретање, оне се зову *одречне* или *отпорне* силе. Оне се прве силе зову још и *убрзавајуће* силе а ове друге *успоравајуће*.

Отпоре и сметње кретању изазивају оне силе, које истина једно већ постојеће кретање успоравају, или га и толико смање да то тело релативно умире, али које не могу једно тело, које је већ у миру да крену. Тако се свакоме покретном телу противи ваздух својим отпором, али тога отпора нема ако је тело мирно. Тако дејствује и отпор трења о подлогу, као и густина воде и т. д. На против кад једно тело бацимо вертикално у вис његовом се пењању опире и ваздух и привлачна снага земљина, међу тим је овде само ваздух отпорна сила у правом смислу, јер кад тело почне из висине да пада, онда је привлачна снага земљина постала радна сила, а ваздух и сад својим отпором смањује кретање тела.

187. Поред свију досадањих особина, које смо код сила нашли, на свакој сили имамо да разликујемо ове појединости: 1) *нападну тачку*; 2) *правац*; 3) *смисао*; и 4) *интензитет* или *јачину* или *величину* силе*).

1. *Нападна тачка.* — Као што се из самога назива види, нападна је тачка неке силе она тачка, у којој она непосредно дејствује на тело. Ако смо неко тело везали концем, па га вучемо, онда је нападна тачка она, у којој је конац утврђен за тело.

2. *Правац силе* јесте онај, којим сила тежи да покрене неко тело ако је у миру или у противном случају, којим сила тежи да неко кретање заустави. У опште говорећи, правац силе јесте онај, којим она тежи да неко извесно кретање промени. У горњем примеру, правац силе дат је правцем којим је конац затегнут.

3. *Смисао силе.* — Видели смо још код посматрања брзина да сваки правац има два смисла: *положан* и *одречан* и да према томе нека сила може дејствовати у истом правцу двојако. Ако се смисао дели на леви и десни, онда се онај зове положни који иде с лева на десно а одречан онај који иде с десна на лево. Ако ли један смисао иде на више, а други на ниже, онда је положан онај, који иде на ниже а одречан је онај на више. Такви називи за смисао сила, јесу просто ствар договора, и постали су отуда што ми пишемо с лева на десно и озго на ниже, па су за то ти смисли и назвати положни. Међу тим врло се често дешава да су називи и изврнути.

Обично пак, ако нека сила дејствује на тело које је у миру, онда се каже да је и правац и смисао силе онај, којим ће се тело кретати.

*) У најновијем издању: „Lehrbuch der Experimentalphysik,“ von *Adolph Wüllner* 1895 на стр. 51 стоји: да је сила одређена: *нападном тачком, правцем и величином.*

Сигурно са тог разлога многи писци не праве разлику између правца и смисла силе.

4. *Интензитет силе*, њена јачина или величина одређује се по количини убрзања *(m a)* које неком телу саопшти за неко извесно време. Да подигнемо у висину један већи камен, треба утрошити више снаге но за подизање једног мањег камена. Ако узмемо да смо и већем и мањем камену променили кретање истим убрзањем а онда смо за већи камен употребили већу силу јер му је маса била већа.

Мало ниже, кад будемо говорили о мерењу сила видећемо како се упоређују интензитети разних сила.

188. За графичко решавање задатака, силе се представљају *графички* и то онако исто као и брзине. Повучена линија, својим почетком представља нападну тачку силе, својом дужином интензитет или јачину, својим правцем правац силе а стрелицом на врху, смисао силе.

189. *Равнотежа сила.* — Може се десити, да више сила дејствују у исти мах на једно тело, или на један систем тела, али тако да се њихова дејства узајамно потиру и да све остаје онако, као да тих сила и нема. Онда се каже, да се те силе одржавају у равнотежи, или да је само тело у *равнотежи.*

Али не треба мислити да кад се каже, да је неко тело у равнотежи, да оно мора бити у миру, јер реч „равнотежа" значи да се тело, на које једновремено дејствује више сила налази у таком стању, као да тих сила и нема. Према томе силе могу бити у равнотежи како на једном мирном тако и на једном покретном телу. Јер замислимо да на неко тело, које се креће извесном брзином и у извесном правцу, на један пут наиђе један нов систем сила који је у равнотежи; тело ће наставити и даље своје кретање онако исто, као да тог новог система и нема.

Из тога следује да и покретна тела могу бити у равнотежи.

За равнотежу у опште, треба да дејствује на тело најмање две силе јер ако само једна сила дејствује о равнотежи не може бити говора, пошто једна сила саму себе не може потрти.

Ако је тело, које је у равнотежи, у релативном миру, онда је то *статичка равнотежа*; на против ако је покретно тело у равнотежи онда се таква равнотежа зове *динамичка*.

Мерење сила.

190. Кад две силе у истим околностима произведу исто дејство, онда се каже да су те две силе једнаке.

Кад сила P произведе у истим околностима два пут веће дејство него сила P', онда се каже да је сила P два пут већа од P'. Исто се тако каже да је нека сила три, четири, десет, сто пута већа или мања од неке друге силе. Из тога излази да су силе величине које се дају међу собом упоређивати, т. ј. мерити.

Пре него што приступимо самом начину мерења сила, ваља да поделимо мерење сила на две групе: на мерење *тренутних* и на мерење *трајних сила*, јер се обе врсте сила не могу мерити истом мером.

А. Мерење тренутних сила.

191. Ми ћемо мало доцније видети, да кад на једно тело дејствује једна тренутна сила, онда се то тело креће и једнако и по правој линији. Према томе тренутна сила може саопштити једноме телу неку извесну сталну брзину C_1. Ако је маса тога тела M_1, онда је величина тренутне силе дата количином једнаког кретања

$$P_1 = M_1 C_1.$$

Ако нека друга тренутна сила P_2 дејствује на неко друго тело масе M_2 и саопшти му брзину C_2 онда је величина те друге силе дата

$$P_2 = M_2 C_2.$$

Ако хоћемо да сравнимо силу P_1 са силом P_2 или да измеримо силу P_2 ако силу P_1 узмемо за јединицу, ми можемо то да постигнемо на два начина: или ћемо их пустити да дејствују на исте масе па наћи њихов однос из произведених брзина, или ћемо се старати да на разним масама произведемо исте брзине, па њихово дејство одредити из маса. У првом случају имаћемо

$$P_1 : P_2 = C_1 : C_2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (90$$

Дакле код једнаких маса силе су сразмерне произведеним брзинама.

Ако је P_1 узето за јединицу, онда је сила P_2 одређена обрасцем

$$P_2 = P_1 \cdot \frac{C_2}{C_1} \cdot \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (90'$$

У случају пак где су масе различите а брзине исте имаћемо

$$P_1 : P_2 = M_1 : M_2 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (91$$

т. ј. *код једнаких брзина, силе су управо сразмерне масама.*

Одавде имамо опет меру за силу P_2 одређену обрасцем:

$$P_2 = P_1 \frac{M_2}{M_1} \cdot \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (91'$$

Ако су и масе и брзине различите, онда се силе имају као количине кретања које свака за се произведе па ће бити

$$P_1 : P_2 = M_1 C_1 : M_2 C_2 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (92$$

одакле је опет

$$P_2 = P_1 \frac{M_2 C_2}{M_1 C_1} \cdot \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (92'$$

Да би пак само мерење тренутних сила могли бројно извршити ваља узети једну силу за јединицу. За јединицу пак узећемо ону силу, која дејствујући тренутно на јединицу масе, изазове у њој јединицу брзине. Ако је то сила P_2 онда је

$$P_2 = 1, \quad M_2 = 1, \quad C_2 = 1,$$

и за меру тренутних јединица имамо

$$P_1 = M_1 C_1$$

или у опште

$$P = M C \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (93$$

То значи, *да се ма каква тренутна сила мери производом из масе и брзине* или у опште *количином брзине или кретања*.

В. Мерење трајних сила.

192. Видели смо мало час, да кад тренутна сила дејствује на неко тело, она у њему изазове сталну брзину С. Али ако после првог тренутног дејства, сила поново дејствује тренутно, она ће променити ту брзину за неку извесну величину; поновљено тренутно дејство силе, поново ће променити брзину и ако та поновљена дејства тренутне силе бивају непрестано, онда се каже да сила не дејствује више тренутно него трајно. Промена коју трајна сила изазове на неком телу јесте врло честа промена брзине, која се промена мери по промени брзине у једној секунди т. ј. по *убрзању*, па било то убрзање положно или одречно.

Кад се цело дејство трајне силе своди на промену брзине, т. ј. на произвођење убрзања, онда се две трајне силе могу упоредити међу собом према убрзању које на једну исту масу произведу т. ј. између такве две силе постоји овај однос

$$P_1 : P_2 = a_1 : a_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (94$$

Ако две различите силе дејствују на две разне масе па произведу у њима једно исто убрзање онда се те силе имају управо као масе, т. ј. између њих постоји овај однос:

$$P_1 : P_2 = M_1 : M_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (95$$

а тако исто за разне масе и убрзања и однос

$$P_1 : P_2 = M_1\,a_1 : M_2\,a_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (96$$

Међу тим ми знамо да је $a = \frac{v}{t}$ па дакле и $a_1 = \frac{v_1}{t_1}$ и $a_2 = \frac{v_2}{t_2}$, с тога кад те вредности за убрзања заменимо дрбићемо

$$P_1 : P_2 = \frac{M_1 v_1}{t_1} : \frac{M_2 v_2}{t_2} \quad \dots \dots \quad (97$$

т. ј. *силе стоје у правој размери са количинама промењивих кретања, а у изврнутој са временима:*

Таква ће сразмера постојати кад су времена разна, али ако су се дејства сила извршила за једно исто време, онда се *силе имају као количине промењивих кретања:*

$$P_1 : P_2 = M_1 v_1 : M_2 v_2 \quad \dots \dots \quad (98$$

Кад су у овом случају масе једнаке онда је

$$P_1 : P_2 = v_1 : v_2 . \quad \dots \dots \quad (99$$

На основу ове сразмере могу се силе заменити брзинама и обратно; али ваља у исти мах приметити да се та замена може учинити само онда, кад су силе дејствовале на исте масе и за иста времена.

Да би се интензитети сила могли бројно представити, мора се једна од њих узети за јединицу. *За јединицу пак узета је она сила која дејствујући на јединицу масе, за јединицу времена саопшти јој јединицу брзине.* Ако је то на пример сила P_2 онда је

$$P_2 = 1, \quad t_2 = 1, \quad M_2 = 1, \quad v_2 = 1$$

и према томе из горње сразмере излази да је

$$P_1 = \frac{M_1 v_1}{t_1} \text{ или у опште } P = \frac{M v}{t} \quad \dots \quad (100$$

Ту једначину можемо и овако да напишемо:

$$M v = P t \quad \dots \dots \quad (100'$$

Производ Pt називају неки писци „временим ефектом" силе.

Ако још $\frac{v}{t}$ заменимо са a онда је

$$P = M a \quad \dots \dots \quad (101$$

то значи *ма каква трајна сила мери се производом из покретне масе и брзине коју произведе за јединицу вре-*

мена или *производом из масе и убрзања*, дакле *количином убрзања*.

193. Пошто се трајне силе мере количином убрзања, то треба за упоређивање сила међу собом, т. ј. за њихово мерење као и за свако друго мерење, изабрати неку количину убрзања која ће служити за јединицу. Та јединица треба да је таква да лако до ње можемо доћи и да је лако можемо контролисати.

И међу многим силама на које наилазимо у природи, изабрата је за јединицу, привлачна сила земљина или *тежа*.

Земљина привлачна снага, као и свака друга сила, може да промени кретање свима телима, која се налазе било на земљиној површини било ван ње, т. ј. она може да им саопшти извесну количину убрзања. Кад је говор о привлачној снази земљиној, онда се убрзање, које она изазива на телима не бележи као за све друге силе са a него са g (од речи *gravitas*) и према томе ће се количина земљиног убрзања писати са mg а не са ma.

194. Ако је тело на земљиној површини подупрто те не може да следује дејству привлачне снаге земљине, т. ј. не може да пада, онда се количина убрзања mg коју му земља саопштава осећа као притисак на подлогу и тај се притисак у обичном животу зове *тежина*; њу ћемо ми у будуће бележити са Q. Услед тога тежина је сила, која постаје услед привлачења земљиног и равна је количини земљиног убрзања, т. ј.

$$Q = mg \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (102$$

Убрзање теже g има за извесно место на земљиној површини извесну вредност. Бројна вредност земљиног убрзања за Београд износи 9·806 мет. т. ј. тело, које слободно пада на географској ширини на којој је Београд, добије убрзање 9·806 или краће 9·81 мет. На свакој другој географској ширини g има другу вредност.

195. Као год што су за мерење дужинских величина владале а и данас владају разне мере, тако је исто и са тежинским мерама. Тек у последње време све се више усваја француски метарски систем за тежине, који је и код нас заједно са метарским системом за дужине усвојен.

У томе систему за јединицу тежине узета је тежина једног кубног сантиметра дестилисане воде.

Али није све једно, колика ће бити температура дестилисане воде, која треба да служи за одредбу јединице силе, јер је тежина исте запремине воде разна на разним температурама. С тога је изабрата вода од 4° Целз. јер је приближно на тој температури једна извесна запремина воде најтежа. Даље, тежина једне исте запремине воде на истој температури, измерена у ваздуху није иста са оном, која се измери у безваздушном простору, за то се, при одредби јединице сила, вода мери у безваздушном простору. На послетку рекли смо да је убрзање g стално само на једној истој географској ширини, и на истој даљини од средишта земљиног, па за то је за g усвојена она вредност коју оно има у Паризу и на морској површини. И тако одређена јединица терета или тежине зове се *грам*. Према свему томе:

грам је тежина једног кубног сантиметра дестилисане воде од 4° Целз. измерене у безваздушном простору у Паризу и на морској површини.

196. Има тежина и већих и мањих од грама и за то су створене тежинске мере 10, 100, 1000 пута веће или мање од грама; те се тежинске мере зову тегови. Ево каквих има обичних тегова:

Тегови мањи од грама:

1 грам	= 10 десигр.	= 100 сантигр.	= 1000 милигр.
	1 »	= 10 »	= 100 »
		1 »	= 10 »

Тегови већи од грама:

1 килогр.	= 10 хектогр.	= 100 декагр.	= 1000 грама
	1 »	= 10 »	= 100 »
		1 »	= 10 »

Врло велики терети мере се метарским *тонама* а то је тежина једног кубног метра воде и има 1000 килограма.

Сем ових мера за тежине употребљене су још и ове мере:

1 фунта (швајцарска) = 0·5 кгр.
1 цента = 100 фунти = 50 кгр.
1 метар. цента = 200 фун. = 100 кгр.
1 француска фунта = 0·4895 кгр.
1 енглеска фунта = 0·4536 кгр.
1 аустријска фунта = 0·5600 кгр.
1 руска фунта (40 = 1 пуд) = 0·4095 кгр.
1 немачка фунта = 0·4677 кгр.
1 шведска фунта = 0·4253 кгр.

197. Мерећи тежине разних тела на једном истом месту ми меримо њихове масе, јер строго узев *тежине које ми меримо нису силе већ масе.* Ако је тежина некога тела Q, она је на једном извесном месту на земљи одређена производом масе и убрзања теже т. ј.

$$Q = m\,g.$$

Тежина другог неког тела нека је Q_1 и она на истом том месту зависи само од масе m_1 пошто се убрзање g не мења. Према томе

$$Q_1 = m_1\,g.$$

А одавде излази да је

$$\frac{Q}{Q_1} = \frac{m}{m_1}$$

дакле тежине се имају као масе, т. ј. тежине су масе.

Али тежине су масе не само на једном месту, него и на целој земљи ако се мере теразијама или кантаром, као што то обично и бива. Једно тело, измерено кантаром или теразијама на екватору имаће исту тежину и на полу ма да су убрзања на екватору и полу различита, јер у колико се променила тежина самога тела на тим разним местима, у толико се променила тежина и тегова и теразије су остале у равнотежи.

Само у оном случају кад тежине меримо на разним местима динамометром, тежине су силе.

198. Масу некога тела одређујемо из његове тежине, кад просто једначину за тежину (102) решимо по масу. Тако имамо

$$m = \frac{Q}{g} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (103$$

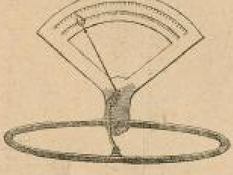
Пошто је g познато то је тежином Q дата и маса тела.

C. Справе за мерење сила и тежина.

Пошто смо изабрали и одредили јединицу за мерење сила и тежина, да видимо којим се справама оне мере.

199. **Динамометар.** — Силе се мере справама, које се зову динамометри. Код свију тих справа, ма какве оне конструкције биле, главна је ствар у овоме: ваља сили, коју хоћемо да измеримо, ставити на супрот другу једну силу, коју можемо по вољи мењати, све док се са првом не изједначи; онда ће вредност познате силе, дати меру за непознату силу.

Та супротна сила, обично је еластичност какве челичне опруге. Опруга се једним својим крајем утврди а на други се крај пусти да дејствује сила, коју хоћемо да измеримо. Под утицајем ове силе опруга се деформише, т. ј. развије се (или се увије) и услед тог деформисања, појаве се молекилске силе, које теже да поврате опрузи првобитни облик. Величина тих еластичних сила расте са деформисањем, и на послетку наступи један тренутак где се уједначе са силом што истеже опругу и коју меримо. И у том тренутку кад једнакост наступи, деформација опруге даје вредност силе, ако смо претходно градуисали инструменат, т. ј. ако знамо деформације које су изазвале силе од 1, 2, 3.... n јединица.

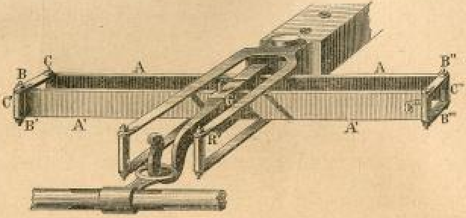


Сл. 72.

Има динамометара врло разних облика али као што рекосмо, основа им је приближно једна иста. Динамометар, као што је у слици слици 72 најпростији је и служи за обична мерења.

Најсавршенији динамометар јесте онај што је конструисао Понсле (Poncelet) а усавршио Морен (Morin).

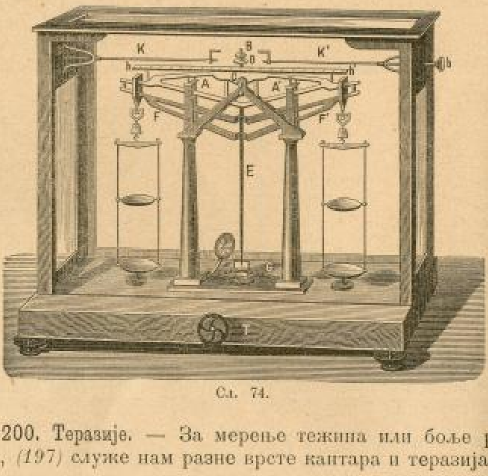
Главни саставни делови тог динамометра су две челичне опруге АА и А'А' (сл. 73), које су међу собом



Сл. 73.

једнаке, паралелне и зглавкасто утврђене на крајевима CC'C"C'''. Цео склоп личи на артикулисани четвороугао.

Под утицајем вукућих сила, које дејству на куку G, опруге се АА и А'А' повију и једна писаљка R утврђена онде где и кука G, повуче на подметнутом листу хартије једну црту, које је дужина сасвим сразмерна сили која вуче на динамометру.



Сл. 74.

200. Теразије. — За мерење тежина или боље рећи маса, *(197)* служе нам разне врсте кантара и теразија. На

овом ћемо месту говорити о тачним, прецизним теразијама и о начинима како се помоћу њих може тачно одредити *маса* тела. Поред справа за тачно мерење дужинских и лучних величина, поред справа за тачно мерење времена, теразије, служећи за тачну одредбу маса, допуњују групу оних справа, које служе да измере три основне величине природне: *простор*, *време* и *масу*.

Теорију теразија остављамо за другу прилику.

201. *Опис тачних теразија.* — Ђерам теразија мора бити и дугачак и лак али при том довољно чврст да се под теретом не повија. Обично се прави од алуминијумске бронзе, која је због своје лакоће врло згодна за то, а има облик дугих шупљих троуглова, премда му се врло често дају и други сложенији геометријски облици.

Кроз средину ђерма пролази једна челична призма С (сл. 74) са углом доста оштрим, која се назива *нож* и које се оштрица, окренута на ниже, било целом својом дужином било само крајевима, наслања на једну односно две веома углађене челичне или ахатске плоче. Оштрица је ножа врло мало затупљена, како не би секла подлогу на коју се наслања; та оштрица служи као ослонац или прекрет ђерма.

Тасови се од прилике на исти начин наслањају на крајеве ђерма као што је сам ђерам подупрт у средини, т. ј. и они висе о оштрице ножева израђених исто тако брижљиво као и средњи нож. (Сл. 75). На тај је начин трење сведено на minimum. Механичар треба да се стара да све три оштрице ножа, буду у колико је то могуће у једној равни. Исто тако његова је дужност да удеси, да по могућству краци ђерма, т. ј. остојања оштрице средњег ножа од обеју оштрица на којима висе тасови, буду једнака.

Сл. 75.

По себи се разуме, да је механичар дужан да направи и ђерам и тасове који о тај ђерам висе тако, да оба крака ђермова буду једнака и по *тежини*. Тиме ће бити испуњени главни услови за „*тачност*“ теразија.

Да би се лако угледала мала скретања ђерма утврђена је једна дугачка игла E (сл. 74) које се врх шета испред једне плочице G подељене на милиметре.

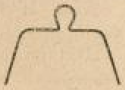
202. *„Осетљивост“* теразија зависи између осталога од дубине тежишта теразија испод тачке ослонца. У колико је оно ближе ослонцу, у толико су теразије осетљивије. Међутим се једним простим или двогубим завртњем *O*, намештеним на ђерму изнад ослонца, може тежиште целе справе спуштањем или издизањем завртња спуштати и издизати, те према томе осетљивост теразија у извесним границама мењати. Та је околност важна с тога, што, кад се тасови оптерете, ђерам се у неколико повије и све три оштрице ножева нису више у истој равни као што су рецимо биле пре терећења. Да се дакле теразијама врати сва осетљивост коју могу дати, подигне се завртањ толико да теразије буду у лабилној равнотежи; спустивши сад завртањ за извесну величину, успостави се опет стабилна равнотежа али је тежиште врло мало испод ослонца и теразије су практички најосетљивије.

203. Кад су оштрице ножева наслоњене на своје се подлоге, оне се самим додиром узајамно кваре. С тога се ни ђерам ни тасови никад, кад се теразијама не мери, не остављају наслоњени на подлоге, већ се једним системом полуга, које се крећу дугметом T, и ђерам и тасови скину са својих подлога. Окретањем тога дугмета у супротном смислу, спушта се полако и ђерам и тасови и мерење се може предузети. Исто тако, никад се тегови и тежишта нити мећу на тасове нити ваде из њих док теразије нису укочене; тек кад се намести и тело и тегови, дугметом се теразије спусте да се види да ли су тегови у равнотежи са телом.

Теразије су затворене са свију страна стакленим поклопцем тако да за време мерења не сметају струје ваздушне и да на теразије не пада прашина. Цео је простор под поклопцем хигроскопским телима осушен, те тако нема опасности да ће челични делови захрђати.

204. У тас се мећу тегови непосредно до једног милиграма. Да се одреде још мање тежине ради се овако: За ђерам је утврђен један хоризонталан лењир hh' подељен и на једном и на другом краку на 10 једнаких делова. Нулта му је тачка у средини и управо изнад оштрице средњег ножа а крајње поделе лењира стоје управо

изнад оштрица тасова; према томе сваки крак ђерма подељен је на 10 једнаких делова. Један комад савијене жице (сл. 76.) и тежак управо један милиграм, може се, помоћу шипака k и k' спустити на извесну поделу хоризонталног лењира. Ако се мете на крајњу поделу, онда тај комадић дејствује целом својом тежином на теразије, дакле целим милиграмом, као кад би га спустили у тас. Спуштен пак рецимо на седму поделу, дејствоваће само са 0·7 своје тежине; ако је на средини између треће и четврте поделе тежиће само 0·35 милиграма и т. д. Помоћу горњих шипака може се тај комадић премештати с поделе на поделу с поља а да се не морају отварати врата од поклопца.



Сл. 76.

205. *Тегови* — Тегови су исто тако важан елеменат као и теразије за тачну одредбу тежина. С тога они морају тако бити удешени да дозвољавају све могуће комбинације тежина и у исти мах да буде бар једнога тега међу њима, за који се зна, у каквом је односу према нормалном тегу исте величине.

Да се први услов испуни обично за теразије које могу мерити 2 килограма, тегови су овако удешени. Један цео килограм, који је упоређен са основним килограмом, за контролу свију осталих као што ћемо мало час видети. Остали ситнији тегови овако су распоређени:

гр.	гр.	гр.	гр.	
500	200	100	100	свега 1000 гр.
50	20	10	10	
5	2	2	1	

Осим тога има један скуп тегова мањих од грама то:

гр.	гр.	гр.	гр.	
0·5	0·2	0·1	0·1	свега 1 гр.
0·05	0.02	0·01	0·01	
0·005	0·002	0 002	0·001	

Као год што тачно мерење тежина зависи од теразија исто тако оно зависи и од тачности тегова. Јер ма колика се пажња обраћала на тачну израду теразија као и на само мерење њима, резултат неће никад бити тачан ако тегови не теже онолико колика је тежина на њима означена. С тога треба цео скуп тегова с времена на време испитивати и изналазити им праву тежину, т. ј. наћи погрешке за колико њихова права тежина одступа од означене тежине.

206. Испитивање тегова бива од прилике на овај начин, премда се ред рада може и променити:

Најпре се међу собом упореде она два тега на којима је означена тежина од 100 гр.; ако буде један тежи од другога и за колико то буде, забележиће се. Сад се оба та тега од 100 гр. упореде са оним од 200 гр. Исто се то ради и са теговима од 10 и 20 гр. као и са онима од 1 и 2 гр.

За тим се тег од 5 гр. упореди са $2 + 2 + 1$; то се исто учини са 50 гр. с једне и $20 + 10 + 10 + 5 + 2 + 2 + 1$ с друге стране; па онда са 500 с једне и свима осталима с друге стране. Најзад се килограм упоређен са основним килограмом мете на један тас а сви остали тегови, који такође износе један килограм на други тас и упореде. Од свију разлика, које се на тај начин буду констатовале направи се таблица са назначењем праве вредности свакога тега.

По себи се разуме, да иста упоређења ваља извршити и са оним теговима, који су мањи од грама.

На тегове треба исто тако пазити као и на теразије. Никад их не треба хватати руком већ нарочитим машицама.

207. *Употреба теразија.* — Одређивање тежине некога тела спада међу најделикатније послове, јер су и теразије мож'да најделикатнија справа научна. С тога ваља с теразијама најобазривије поступати. На првом месту ваља приметити да сваке тачне теразије имају извесну границу терећења изнад које се не смеју теретити а да се не покваре. Та је граница обично на теразијама назначена а и сами скуп тегова, који такве теразије прате то показује.

Највише се кваре теразије док се удешава једнакост између терета и тегова па се теразије спуштају пре него што је приближна равнотежа постигнута. С тога је боље претходно приближно изједначити терет са теговима на другим каквим мање осетљивим теразијама или кантару па употребити теразије само за оне ситне тегове за које прва справа није осетљива.

208. Што су теразије осетљивије у толико је теже дочекати да се умире и да игла покаже нулту тачку на скали. За то се обично код осетљивих теразија и не чека да се теразије зауставе и покажу равнотежни однос, него се посматрају осцилације игле на једну и другу страну и из њих се онда одређује рачуном оно место на коме ће се игла зауставити. Кад се дакле одређује равнотежа по тој, тако званој *„методи клаћења“*, онда је боље да на скали не буде нулта тачка у средини, него на једном крају и да цифре непрекидно иду с једног краја на други тако да с једне стране буде 0, у средини 10 (или 15) а на другом крају 20 (или 30). Онда није потребно водити рачуна о знацима при читању.

Обично је довољно прочитати три пут положаје игле и то два пут с једне и једанпут с друге стране. Ако су тако прочитани положаји игле били n_1 n_2 и n_3, онда би се игла зауставила код положаја n, који се овим обрасцем одређује

$$n = \frac{n_1 + 2n_2 + n_3}{4}.$$

Неки експериментатори препоручују да се четири положаја игле прочита: два с једне два с друге стране. У том се случају n одређује овим обрасцем:

$$n = \frac{n_1 + 3n_2 + 3n_3 + n_4}{8}.$$

Најзад може се прочитати пет пута положај игле и то три пут с једне а два пут с друге стране. За тим се одреди аритметичка средина из цифара добијених с једне па онда добијених с друге стране; из те две делимичне аритметичке средине добија се општа аритметичка средина, која је у исти мах и тачка на којој би се казаљка зауставила. Рецимо да смо прочитали:

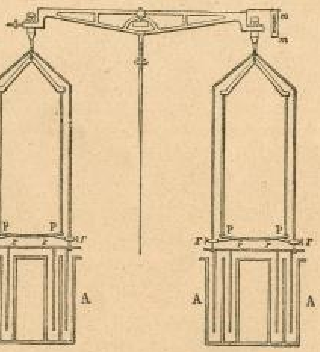
лево:	10·4,	10·3	10·3
десно		9·1	9·2

Аритметичка средина левих цифара је 10·33, а десних 9·15; општа пак 9·74.

Пре свакога мерења, треба на исти начин одредити и положај казаљке кад су теразије са свим празне. Јер се услед разних узрока може равнотежни положај казаљке за празне теразије од једног мерења до другог изменити.

209. Метода клаћења, на коју смо упућени код тачнога мерења тежина врло је дангубна, јер обично теразије клате врло споро. С тога се покушавало да се конструишу теразије које би биле осетљиве али које не би дуго клатиле; које би се дакле брзо зауставиле. Такве једне *апериодичне* теразије представљене су шематички на сл. 77.

Услед тога, што се ваздух креће се великим отпором кроз узане судове, додате су тасовима P P, два концентрична метална цилиндра затворена озго плочом *r r*. Ти се цилиндри крећу заједно са тасовима на више и на ниже и улазе у међупросторе друга три исто тако



Сл. 77.

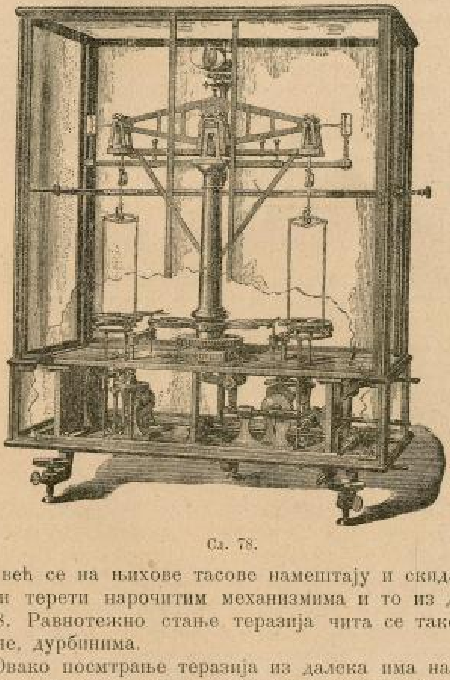
концентрична цилиндра али непокретна. Пошто је ваздуху врло тешко да се слободно креће кроз узане просторе између цилиндара, то он спречава клаћење теразија и оне се после два три клаћења зауставе.

Теразијама је додат на једном крају ђерма нарочити микрометар m m са једном фотографисаном скалом на стаклету, подељеном на 200 делова; микроскопом, који је утврђен у један дувар самога поклопца чита се положај ђерма према микрометру. Ако је микрометар претходно градуисан, може се непосредно на њему прочитати равнотежно стање теразија.

Код тих је теразија тежиште много дубље но код осталих; то значи да су оне неосетљивије.

210. И ако су те апериодичке теразије практичније јер се њима брже изврши мерење, ипак се оне за велики број прецизних мерења не могу употребити. Јер се искуством дознало, да је најбоље да теразије буду у безваздушном простору, а такве теразије морају дуго клатити.

Са свим прецизне теразије се херметички затворе стакленим поклопцем па се из простора под поклопцем извуче ваздух. До теразија се дакле не може никако



Сл. 78.

доћи већ се на њихове тасове намештају и скидају тегови и терети нарочитим механизмима и то из далека. сл. 78. Равнотежно стање теразија чита се такође из даљине, дурбинима.

Овако посматрање теразија из далека има нарочито ту добру страну, што је избегнуто намештање и скидање тегова са тасова, руком, услед чега се један крак теразија може јаче загрејати од другог а тиме би мерење испало погрешно. Јер ако се један крак теразија само за 0·1° јаче загреје од другог, тежина од 1 кгр. може испасти за мгр. погрешна.

Теразије, којим се испитује и оверава тежина врло ситних тегова, (на пример тегови од десиграма, па на ниже) имају ђерам који се не наслања оштрицом ножа већ врховима игала. Таким се теразијама може костатовати разлика од $\frac{1}{3000}$ дела милиграма. Али се таке теразије и не терете више од 4 до 5 грама.

211. Осетљивост се теразија изражава обичним чистим разломком, кога је бројилац најмањи тег за који теразије скрену а именилац тежина ђерма и највећег дозвољеног терета, који се извесним теразијама сме измерити. То је дакле осетљивост пуних, највећма оптерећених теразија. Кад су теразије мање оптерећене, осетљивост им је већа; теразије су најосетљивије кад су празне, осим ако се то другојаче не удеси.

Обично осетљиве теразије морају имати осетљивост од $\frac{1}{100000}$ т. ј. кад се у сваком тасу налази по 10 килограма, да скрену кад се у ма кој тас мете још један десиграм. (Ради лакшега рачуна занемарујемо тежину теразија т. ј. ђерма и тасова).

Теразије које на својим тасовима носе по један килограм и могу да скрену кад се у сваки тас мете по један милиграм, мере већ један милионити део свога једностраног терета. Такве теразије нису ретке. Осетљиве хемијске теразије које не мере велике терете, имају често осетљивост од $\frac{1}{2,000.000}$.

Француски физичар Рењо (Regnault) имао је теразије, које су под теретом од 10 килограма скретале кад им се у један тас дода само један милиграм. Осетљивост им је дакле $\frac{1}{10,000.000}$.

Код теразија, којим се упоређују тегови у међународном заводу за тежине код Париза, и којима се могу мерити тежине од 100 килограма, постигнута је осетљивост од $\frac{1}{100,000.000}$.

Са теразијама, затвореним у безваздушном простору, кад се врло обазриво и пажљиво ради, постиже се осетљивост од $\frac{1}{300,000.000}$, а под теретом од једнога килограма.

D. Разни начини тачнога мерења тежина

212. Ма како брижљиво теразије биле конструисане, никад се оне не сматрају да су тачне: од теразија се тражи само да су довољно осетљиве па се њима одређује тежина као са нетачним теразијама.

Али пре него што пређемо на разне начине тачнога мерења нетачним теразијама, да видимо како се у опште теразијама мери.

Најобичније се оптерети јадан тас телом а други теговима, док се равнотежа не постигне, т. ј. док игла не покаже да је ђерам хоризонталан; у том се случају увек чека док се теразије са свим не зауставе и док игла не стане у средину скале па била та средина обележена нулом или којом другом цифром. Ми ћемо је краткоће ради звати „нултом тачком“ (па и ако ту буде каква друга цифра на пример 10, као што то обично бива). Ако се казаљка не заустави управо код нулте тачке, онда се или оном савијеном жицом коју по ђерму помичемо или непосредним мењањем тегова удешава да казаљка покаже нулту тачку.

213. Ако су теразије иоле осетљивије, потпуно заустављање теразија врло дуго траје. С тога се онда посматрају клаћења с једне и друге стране као што смо напред видели, па се из њих нулта тачка израчунава. Али ванредно је тешка ствар постићи, да се израчуната нулта тачка *оптерећених* теразија потпуно *поклопи* са исто тако израчунатом нултом тачком *празних* теразија; другим речима врло је тешко метути на један тас управо онолико тегова до последњег милиграма, колико је тешко тело, које меримо. Обично ћемо наћи да су тегови или мало тежи или мало лакши од самога тела, јер ће нам рачун показати, да је нулта тачка пуних теразија час лево час десно од нулте тачке празних теразија. Оваким дакле мерењем тежина „поклапањем нултих тачака“ ретко ћемо кад моћи одредити праву тежину тела; у највише случајева та ће тежина бити одређена само приближно.

Ако дакле хоћемо, ма како осетљивим теразијама да дознамо, колику управо тежину тегова треба да метемо на један тас па да одрже равнотежу телу, које је на другом тасу, треба да се послужимо интерполацијом *(19)* и то на овај начин:

Претходно ћемо клаћењем (па било то са три, четири или пет посматрања) одредити нулту тачку празних теразија. Не треба пустити да казаљка избија сувише далеко на једну и другу страну од средине. Најбоље је да то избијање казаљке на једну страну не буде веће од 5 подела скале нити мање од две поделе. Тако одређена нулта тачка празних теразија нека буде n_0.

Сад се у један тас мете тело а у други тегови да се приближно изједначе али се не треба старати да равнотежа буде потпуна. Клаћењем се понова одреди нулта тачка овако пуних теразија, која ће рецимо пасти за 1 до 3 поделе на десно. (Не треба дозволити да скретање ове друге нулте тачке буде веће од три поделе од оне нулте тачке коју смо за празне теразије нашли). Рецимо да нам то избијање нулте тачке у десно показује да су *тегови лакши од тела*; њу ћемо онда означити са n, а тежину тегова под којим се то десило са p.

Пошто су нам теразије показале да је тело теже од тегова, ми ћемо додати још кој тег (било непосредно, било премештањем оне жице по ђерму) толико, да нам теразије јасно покажу да су *тегови тежи од тела* и да казаљка сада избија више на леву страну. Посматрањем клаћења наћићемо да сада нулта тачка казаљке пада код N, (за 1 до 3 поделе лево он n_0) а тежина тегова која се сада на тасу налази нека је P. Тражена тежина тела, која одговара нултој тачки код n_0 нека је Q.

Пошто су за мала клаћења, разлике у избијању казаљке на једну или другу страну сразмерне разлици тежина, које та избијања изазивљу, то се можемо послужити обрасцем за интерполацују, који смо раније видели (обр. 23):

$$(n_0 - n) : (N - n) = (Q - p) : (P - p)$$

Одавде је права тежина

$$Q = p + (P - p)\left(\frac{n_0 - n}{N - n}\right).$$

Примера ради узмимо да је нулта тачка празних теразија она, коју смо мало пре нашли у једном примеру т. ј. $9{\cdot}74 = n_0$. Извршивши још оне две друге операције нашли смо:

Терет:	посматр. поделе:	арит. сред.	нулта тачка
p = 3036 мг.	7·8 7·8 7·9 10·3 10·2	7·83 10·25	9·04 = n
P = 3037 мг.	9·5 9·4 9·3 10·5 10·5	9·40 10·50	9·95 = N

Према томе

$$Q = 3036 + (3037 - 3036)\frac{9{\cdot}74 - 9{\cdot}04}{9{\cdot}95 - 9{\cdot}04} = 3036{\cdot}77 \text{ мгр.}$$

Да су теразије тачне, овај један низ посматрања био би довољан па да дознамо одмах праву тежину тела Q. Међутим ми знамо, да теразије нису тачне, онда треба да видимо, како ћемо и погрешним теразијама, добити тачне вредности за тежине.

214. **Двојно мерење.** — Тај се начин мерења тежина зове још и „*Бордин начин*" јер га је Борда први пут употребио. По њему морамо за сваку одредбу тежине два пут мерити. Најпре се мете тело у један тас па се теразије доведу у равнотежу метањем у други тас оловних сачама или песка. За тим се извади тело, које меримо из таса, па се на његово место мећу тегови све док се равнотежа понова не постигне. И ови тегови представљају сада праву тежину тела, јер у оба пута и тело и тегови дејствују на *исти* крак ђерма, одржавајући равнотежу другом краку. Ма како била неједнака оба крака међу собом, ипак се овим путем тежина тачно одређује.

215. **Обострано мерење.** — Тај се начин мерења назива још и „*Гаусов начин*" и у више је прилика згоднији од првога; и њиме се тело два пут мери, али се први пут измери у једном па онда у другом тасу.

Рецимо да смо на горе показани начин нашли тежину тела $= Q_1$ кад је тело било рецимо у десном тасу. За овим преместимо тело у леви тас а тегове мећемо у десни; ако теразије нису тачне, ми ћемо сад наћи другу тежину Q_2 истоме телу. Кад обе те тежине помножимо и из производа извучемо квадратни корен, имаћемо праву тежину тела:

$$Q = \sqrt{Q_1 \, Q_2}.$$

По овоме се начину упоређују основни килограми у међународном бироу за мере и тежине. У врло много случајева а нарочито кад разлика између Q_1 и Q_2 није велика, можемо се послужити и овом приближном једначином:

$$Q = \frac{Q_1 + Q_2}{2}.$$

216. **Начин сталнога терећења.** — По горњим методама једним истим теразијама мере се врло различити терети (наравно у границама дозвољеним за извесне теразије); међу тим видели смо, да је осетљивост истих теразија под разним терећењем различита. Ако дакле хоћемо, да разни терети, измерени истим теразијама буду измерени са истом осетљивошћу, треба теразије да буду увек подједнако оптерећене; најбоље је за то стално терећење изабрати највећи дозвољен терет. Ево како се онда поступа:

Рецимо да имамо посла са теразијама које се смеју оптеретити са по једним килограмом у сваком тасу и које су онда осетљиве за један милиграм; у један ћемо тас метути један цео килограм а у други целу серију осталих тежина, која такође износи један килограм. Теразије ће бити у равнотежи; ако то не буде ми ћемо малим додатком с једне или с друге стране равнотежу поставити. Сад се мете тело које хоћемо да измеримо у онај тас где су ситни тегови и из таса се извади онолико од тих тегова, колико је тешко само тело које меримо т. ј. док се равнотежа опет не постави. Збир извађених тегова је очевидно тежина тела.

Овај је начин мерења у принципу Бордин начин с том само разликом што се све тежине одређују са истом осетљивошћу јер су теразије увек стално и подједнако оптерећене.

Е. Специфичка тежина и густина тела.

217. Тежине тела разних величина и запремина, које одређујемо непосредно на динамометру, или теразијама, зову се *апсолутне тежине* или просто *тежине*. Али у даљим испитивањима биће нам често потребно да знамо тежину само *јединице запремине* тога тела, како би је могли упоредити са тежином јединице запремине другог

неког тела те наћи однос њихових маса. Та тежина запреминске јединице тела или материје, зове се *специфичка тежина*. Другим речима, један кубни сантиметар воде и један кубни сантиметар гвожђа нису једнако тешки. И број који показује, колико је пута један кубни сантиметар гвожђа тежи од једног кубног сантиметра воде, зове се специфичка тежина гвожђа, јер он показује у исти мах тежину јединице запремине гвожђа. Ту ћемо специфичку тежину означавати са σ.

Пошто у једној запремини v неког тела има не један, него v кубних сантиметара материје, онда ће и тежина те запремине имати не само σ него $v\sigma$ грама, па зато ће свака тежина у опште Q бити

$$Q = v\sigma \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (104$$

равна *производу из запремине и специфичке тежине.*

Из тог обрасца можемо одредити специфичку тежину кад знамо апсолутну тежину и запремину:

$$\sigma = \frac{Q}{v} \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (105$$

а тако исто и запремину из апсолутне и специфичке тежине

$$v = \frac{Q}{\sigma} \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (106$$

218. **Специфичка запремина.** — *Специфичку тежину* ваља разликовати од *специфичке запремине*. Док је специфичка тежина, тежина јединице запремине, дотле је *специфичка запремина, запремина јединице тежине* и равна реципрочној вредности специфичке тежине т. ј. специфичка запремина

$$\Phi = \frac{1}{\sigma} \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (107$$

равна је јединици подељеној специфичком тежином.

На пример, специфичка тежина гвожђа је $= 7$, т. ј. један кубни сантиметар гвожђа тежак је 7 грама. Његова пак специфичка запремина биће

$$\Phi = \frac{1}{7} = 0{\cdot}144 \text{ куб. сантиметра.}$$

Из тог обрасца можемо добити

$$\sigma = \frac{1}{\Phi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (108$$

што кад заменимо у (104 имаћемо:

$$Q = \frac{v}{\Phi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (109$$

а тако исто и

$$\Phi = \frac{v}{Q} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (110$$

одакле опет

$$v = \Phi Q \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (111$$

Овај је образац сасвим сличан само изврнут са оним за апсолутну тежину $Q = \sigma v$.

219. Апсолутна и релативна специфичка тежина и густина. — Видели смо да је специфичка тежина некога тела, тежина његовог једног кубног сантиметра. Та се специфичка тежина зове још и *апсолутна специфичка тежина*. А специфичка тежина, коју добијамо кад упоредимо тежину једне извесне запремине некога тела са тежином исте толике запремине чисте воде од 4^0 Целз., или што је све једно, однос између масе некога тела и масе чисте воде на 4^0 Целз. зове се *релативна специфичка тежина*.

Густином се назива збијеност материје у некоме телу, и мери се по количини материје, т. ј. по маси у јединици запремине тога тела. *Апсолутна је густина некога тела маса једног његовог кубног сантиметра.*

Ако је густина некога тела у свима његовим деловима иста, онда се такво тело зове *хомогено*. Ако ли је она у разним деловима тела разна, онда је тело *хетерогено*. Ми ћемо у целом овом одељку замислити да имамо посла са хомогеним телима.

Знамо да је

$$Q = m\,g$$

за ма коју тежину; ако тражимо тежину јединице запремине т. ј. специфичку тежину σ, онда можемо према горњем у место масе те јединице ставити њену густину δ па имамо

$$\sigma = \delta g \quad \cdots \quad (112$$

И тако апсолутна специфичка тежина сразмерна је 1° густини δ, 2° интензитету теже g на извесном месту. На једном истом месту, апсолутне специфичке тежине разних тела, сразмерне су њиховим густинама.

Однос, који постоји између апсолутне и релативне специфичке тежине као и густине наћићемо на овај начин. Означимо са σ апсолутну специфичку тежину некога тела а са δ његову густину; означимо са Σ и са $\triangle$ исте величине али за дестилисану воду од 4° Целз. Онда имамо да је релативна специф. тежина ϱ некога тела

$$\varrho = \frac{\sigma}{\Sigma} = \frac{\delta}{\triangle} \quad \cdots \quad (112'$$

одакле је

$$\delta = \varrho \triangle \quad \cdots \quad (113$$

$$\sigma = \varrho \Sigma = \varrho \triangle g = \delta g \quad \cdots \quad (114$$

Експериментом се може непосредно одредити релативна спец. тежина разних тела. Према томе, ако хоћемо да имамо густину некога тела δ, или његову апсолутну специфичку тежину σ, треба знати густину воде на 4° Целз. $\triangle$. Та пак густина одређена експериментом износи

$$\triangle = 1{\cdot}000013 \text{ гр.} \quad \cdots \quad (115$$

$\triangle$ се тако мало разликује од јединице, да се број, који представља релативну специф. тежину и број, који представља густину тела, разликују тек у петој децимали. Па како се ни најбољим методама за одређивање релат. специф. тежине ϱ, не могу пет децимала одредити сасвим тачно, може се у практици релативна спец. тежина узети за густину.

У исти мах ваља да приметимо, да су релативне специф. тежине свуда сразмерне густинама, и да су сразмерне и апсолут. специф. тежинама на једном истом месту. Према томе ако не мењамо географску ширину, можемо увек апсолутне специф. тежине заменити или густинама или релатив. специфич. тежинама, а да опет не променимо вредност односа између њих.

На основу свега тога долазимо до ових закључака:

1. Апсолутна и релативна специф тежина и густина су три коефицијента сасвим различна међу собом.

2. Апсолутну специфичку тежину добијамо из релативне, кад ову помножимо са апсолут. специф. тежином воде, а из густине кад густину (δ) помножимо са убрзањем теже. Пошто у оба случаја апсолутна специф. тежина зависи од убрзања теже, то се она мења на разним географским ширинама.

3. Релативне специфичке тежине, т. ј. специфичке тежине у обичном смислу речи сразмерне су (а не једнаке) густинама.

220. *Таблица (релативних) специфичких тежина разних тела.*

I. Чврста тела (проста и сложена)

Осмијум (Os)	22.48
Иридијум (Jr)	22·42
Платина (Pt) (растопљ.)	21·45
Злато (Au) ваљано	19·36
„ растопљ.	19·26
Уран (U)	18·33—18·40
Жива (Hg) чврста на — 40°	14·39
Олово (Pb)	11·35
Сребро (Ag) (растопљ.)	10·512
Визмут (Bi)	9·82
Бакар (Cu) ваљан	8·95
„ растопљен	8·85
Никл (Ni) кован	8·67
„ „ растопљен	8·28
Бронза стара	8·45—9·20
„ за топове	8·44—9·24
„ за звона	8·813
„ каљена	8·686
Челик кован	7·840
„ меки	7·833
„ каљен	7·816
„ растопљен	7·717
Ковано гвожђе (Fe)	7·60—7·80
Метеорско гвожђе	7·30—7·80

Ливено гвожђе бело	7·44—7·84
» » сиво	6·79—7·05
Калај (Sn)	7·30
Цинк (Zn) ваљан	7·54
» ливен	7·05
Арсеник (As)	5·67
Селен (Se)	4·30
Алуминијум (Al) ваљан	2·67
» растопљен	2·56
Лискун	2·65—3·15
Плави камен	2·27
Сланик	2.28
Графит (C)	2·09—2·24
Азбест	2.1—2.8
Кух. со	2·14
Креда	2·1—2·7
Сумпор (S)	2·00
Фосфор (Ph)	1·77
Магнезијум (Mg)	1·74
Стипса	1·71
Морска пена	1·35
Антрацит	1·34—1·46
Камени угаљ	1·28—1·36
Мрки угаљ	1·20
Лигнит	1·10—1·35
Анилин	1·04
Камфор	1·00
Натријум (Na)	0·97
Калијум (Ka)	0·86
Асфалт	0·83—1·16
Кокс	0·45

Драго камење:

Циркон	4·04—4·67
Сафир, (оријенталски, кориндон)	4·00
Топаз (оријенталски)	4·00
Малахит	3·92—4·00
Рубин (разне врсте)	3·51—4·00
Гранат зелени	3·84
Дијамант (C)	3·52—3·53
Турмалин	3·03—3·13
Мачије око	2·64—3·74
Смарагд	2·77
Спат	2·73
Лабрадорит	2·72
Кварц	2·65
Аметист (љубичасти)	2·65
Сунчев камен { олигоклас	2·65
Сунчев камен { ортоз	2·56

Хелиотроп	2·54—2·62
Ахат	2·53—2·62
Месечев камен (ортоз)	2·59
Амазонски камен	2·57—2·59
Тиркиз	2·52—2·82
Сафир водени, (кордилерит)	2·58
Ћилибар	1·06—1·11

Камење за грађевине и вајарство

Анхидрит	2·94—2·96
Базалт	2·78—3·10
Магнезијски мрамор	2·82—2·85
Цемент	2·7—3·1
Трахит	2·70—2·80
Алабастер (кречни)	2·69—2·78
Гранит	2·63—2·75
Кречни мрамор	2·65—2·74
Литографски камен	2·67—2·70
Порфир	2·61—2·94
Сијенит	2·63—2·73
Кварцит	2·65
Кречни камен уситњен	2·60—2·68
» » у комађу	1·94—2·06
Серпентин	2·49—2·66
Гипс у комадима	2·17—2·20
Пешчар	1·90—2·70
Цигле	1·40—2·20
Песак влажан	1·9
» сув	1·5

Зидови од камена и кречног малтера

Скорашњи	2·12—2·45
Суви	2·05—2·40

Зидови од цигаља и кречног малтера

Скорашњи	1·55—1·70
Суви	1·47—1·59

Стакло и порцулан

Тешко флинт стакло	4·056—4·358
Хинески порцулан	2·384
Кристално стакло	3·330
Стакло за судове	2·64—2·70
Саксонски порцулан	2·493
Крон (crown) стакло	2·447—2·657
Стакло за прозоре	2·527
Старо стакло из Помпеје	2·490

Стакло за огледала	2.463
Порцулан из Севра	2·242

Древа

Гранатно дрво	1·35
Холандски шимшир	1·32
Црно дрво (абонос)	1·12—1·21
Гвоздено дрво	1·02—1·09
Средња густина сирових дрва . . .	1·000
Буковина	0·91
Растовина	0·61—1.17
Ораовина	0·68—0·92
Шљивовина	0·87
Јабуковина и крушковина	0·73
Маслиново дрво	0·68
Црвено (махагони) дрво	0·56—0·85
Јаворовина сува	0·65
Средња густина сувих дрва	0·66
Ливански кедар	0·49—0·66
Чамовина	0·49—0·66
Платан	0·65
Липовина	0·60
Врбовина (сува)	0·54
Топола	0·39—0·51
Плута	0·24

Земље:

Иловача влажна набијена	2·06
„ сува	1·93
Баштенска влажна	2·05
„ сува	1·63
Сува мршава земља	1·34

Биљне и животињске материје:

Оклопи бисерне шкољке	2·74—2·78
Бисер	2·68—2·75
Корали	2·69
Кости	1·80—2·00
Памук	1·95
Слонова кост	1·93
Лан	1·79
Вуна	1·61
Шећер	1·61
Амидон (штирак)	1·53
Гумарабика	1·4
Свила	1·33—1·34
Рог	1·31

Тврда гума	1·15
Човечије тело (средња вредност)	1·07
Црна смола	1·07
Каучук	0·99
Гутаперка	0·97
Стеарин	0·97
Восак	0·96
Маст	0·94
Лој	0·92
Парафин	0·89

Легуре:

Злато и бакар:	
98 Au 2 Cu	18·84
96 „ 4 „	18·36
94 „ 6 „	17·95
92 „ 8 „	17·52
90 „ 10 „	17·16
88 „ 12 „	16·81
86 „ 14 „	16·47
Олово, визмут и кадмијум:	
7 Cd, 40 Pb, 53 Bi	10·56
Олово и калај:	
87·5 Pb 12·5 Sn	10·60
84 „ 16 „	10·33
77·8 „ 22·2 „	10·05
63·7 „ 36·3 „	9·43
46·7 „ 53·3 „	8·73
30·5 „ 69·5 „	8·24
Wood-ов (лако топљиви) метал	9.7
Бронза:	
90 Cu 10 Sn	8·78
85 „ 15 „	8·89
80 „ 20 „	8·74
75 „ 25 „	8·83
Средња вредност	8·8
Месинг жути ливен	8·44
„ „ ваљан	8·56
„ „ извлачен	8·70
„ црвени	8·60
„ бели	8·20
Ново сребро	
Хинеско 26·4 Cu, 36·8 Zn, 36·8 Ni	8·30
Немачко	8·40
Француско	8·60

Кадмијум и калај (32 : 68)	7·7
Алуминијумска бронза (10% Al) . .	7·7

Амалгами:

Амалгам олова	12·0—12·8
» визмута	10·2—11·2
» злата	15·4
» калаја Hg. Sn	10·3
» » $Hg. Sn_2$	9·3
» » $Hg. Sn_3$	8·8
Алуминијум и калај (91% Al) . . .	2·85

II. Течности

Жива на 0°	13·5956
Бром	2·966
Сумпорна киселина (енглеска) . . .	1·848

Разблажена сумп. кисел. по Делезену на 15° Целз.:

10 процента киселине	1·066
20 » »	1·138
30 » »	1·215
40 » »	1·297
50 » »	1·387
60 » »	1·486
70 » »	1·595
80 » »	1·709
90 » »	1·805
Азотна киселина	1·52

Разблажена азот. кисел.:

10 % кисел.	1·054
20 » »	1·111
30 » »	1·171
40 » »	1·234
50 » »	1·295
60 » »	1·348
70 » »	1·398
80 » »	1·438
90 » »	1·473
Хлороформ	1·480
Сумпорни угљеник	1·263
Глицерин	1·260
Млеко	1·03
Морска вода	1·026
Дестилисана вода на 4° Ц.	1·000
» » » 0°	0·99987
Вино	0·99

Зејтин ланени	0·953
» од маслине	0·915
» од репе	0·91
» од лимуна	0·852
» од кромпира	0·818
Бензин	0·89
Терпентин	0·864
Петролеум	0·836
Алкохол апсолутни	0·795
Етар	0·730
Валил (C_8 H_9)	0·694
Кисеоник (течан — 130° и 300 атм.)	0·9
Азот (течан 0° и 300 атм.)	0·4
Водоник (течан 300 атм.)	0·03

III. Гасови и паре

	према ваздух	према води
Ваздух	1	0·001293
Хлор (Cl)	2.448	0·013180
Угљена киселина (CO_2)	1·529	0·001977
Хлороводонична киселина (HCl) . .	1·2474	0·001613
Кисеоник (O)	1·1056	0·001430
Азот (N)	0·9714	0·001256
Етилен (C_2 H_4)	0·9674	0·001252
Угљен моноксид (CO)	0·967	0·001251
Водена пара	0·6235	0·000806
Амонијак (NH_3)	0·5889	0·000762
Водоник (H)	0,06926	0·000090

Примедба. — Специфична тежина сувог ваздуха (према води) на температури 0° а под нормалним притиском износи:

$$\frac{1}{773{\cdot}28}.$$

Рењо (Regnault) је нашао, да један литар сувог ваздуха у Паризу, на 60 мет. изнад морске површине, на температури 0°, и под притиском од 76^{cm} износи 1·293187 гр. На неком месту, кога је географска ширина 45° (приближно у Београду) и на морској површини, један литар ваздуха тежи 1·292743 гр. Међу тим на температури ϑ, под притиском b, на геогр. ширини φ, и на висини h изнад морске површине, ако је полупречник земље на том месту R, тежина једног кубног десиметра (т. ј. једног литра) сувог ваздуха у грамовима одређује се овим обрасцем:

$$1{\cdot}292743 \frac{b}{(1 + 0{\cdot}00366\,\vartheta)\,76}\,(1 - 0{\cdot}00265 \cos 2\varphi)\left(1 - \frac{2h}{R}\right).$$

221. Одредба запремине једнога тела. — Ако је V запремина, δ густина и Q тежина неког хомогеног тела, онда имамо

$$Q = V\delta \quad \text{одакле} \quad V = \frac{Q}{\delta}$$

Да се дакле одреди V, ваља најпре измерити тело као што смо напред описали; за тим кад се зна релативна специфичка тежина (т. ј. обична), њоме се одреди густина δ по обрасцу (113):

$$\delta = \varrho \times 1{\cdot}000013$$

Густина ће бити $\delta = \varrho$ ако се не тражи велика тачност.

222. Поправке тежина измерених тела. — Кад се једно тело мери теразијама у обичном ваздуху, онда нађена тежина у грамовима не представља праву тежину тела, јер свако тело у ваздуху губи од своје тежине онолико колико је тежак онај ваздух што га је оно истисло. Исто се то дешава и са теговима, и тежина би била права само у оном случају кад би запремина тела била иста са запремином тегова. Пошто то није увек случај, ваља измерену тежину свести на безваздушни простор.

Нека је Q права тежина једног хомогеног тела, σ његова спец. тежина; γ спец. тежина ваздуха, онда је то тело притискивало на тас теразија тежином

$$Q\left(1 - \frac{\gamma}{\sigma}\right).$$

Та је тежина потпуно равна оној, са којом притискују тегови q, који се мету на место тела код двојног мерења, она износи

$$q\left(1 - \frac{\gamma}{\sigma'}\right)$$

где је σ' спец. тежина метала од кога су тегови направљени. Према томе

$$Q\left(1 - \frac{\gamma}{\sigma}\right) = q\left(1 - \frac{\gamma}{\sigma'}\right)$$

одакле је

$$Q = q\frac{1-\frac{\gamma}{\sigma^1}}{1-\frac{\gamma}{\sigma}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (116$$

Општи закони о силама.

Пошто сва кретања у природи мењају силе, да видимо, који закони владају силама па дакле и кретањима на која оне утичу.

А. Кретање тела кад на њега не дејствује никаква спољашња сила.

223. Ако никаква спољашња сила не дејствује на тело које се креће, (то вреди и за тела која су у миру јер се и она крећу брзином = 0) онда то тело задржава оно кретање у коме је и не може га само собом променити.

На први поглед изгледа, да је то у опреци са оним што свакога тренутка посматрамо, јер свуда око нас видимо да се кретања мењају и да се сва покретна тела после дужег или краћег времена зауставе. Међу тим заустављање и мењање кретања тела на површини земљиној долази у највише случајева од привлачне снаге земљине, дакле од једне спољашње силе, затим од других отпорних утицаја. Јер с друге стране знамо да се тела у толико дуже крећу што су ти отпорни утицаји слабији.

Међу утицајима који чине да се кретања на земљи или ослабе или униште, долазе на прво место трење и отпор. Кугла која се по земљи котрља услед трења о земљу зауставиће се; кад је трење мање, т. ј. кад се кугла котрља рецимо по леду, она ће се много дуже кретати и много даље отићи.

Осим трења, кретању смета и отпор ваздуха. Клатно ће много дуже клатити у безваздушном простору но у ваздуху. Нарочито јако утиче отпор ваздуха на тела која се брзо крећу. Кад не би било ваздуха пушка би и топ много даље терали но сад.

Земља наша само се тако непрестано креће са истом брзином око сунца, јер не наилази ни на какав мерљиви отпор; свака материја која би била у простору и која би давала знатан отпор земљи као што то чини ваздух, учинила би те би се земља по једној завојној, спиралној линији све већма приближавала сунцу и најзад на њ пала.

Кад дакле никаква сила са стране не мења кретање неког тела, онда се брзина кретања никако не мења и такво се тело креће једнаком брзином. Пошто се без стране силе не може ни правац кретања променити онда је такво кретање увек по правој линији.

На основу свега тога може се извести ово правило:

Кад се неко тело креће а на њега не утиче никаква страна сила, онда се то тело мора кретати једнаком брзином и по правој линији.

То је *први закон* кретања.

В. Кретање тела под утицајем страних сила

224. Замислимо да смо у железничком, вагону који још није пошао, па бацимо једну куглу у висину да достигнемо таван вагона. Кугла је дакле била мирна и ми смо јој саопштили неко кретање дејством стране једне силе (мишићне). Рецимо да се вагон кренуо и да јури извесном брзином; са њим јуримо и ми и кугла и све што је у њему. Ако сад бацимо куглу у висину ми ћемо морати утрошити исто онолико снаге (ни више ни мање) да достигне таван вагона као и мало час. Међу тим сад кугла није била мирна него се са вагоном заједно кретала.

Исто тако ако испустимо из руку један камен док је воз у миру, он ће пасти јер га земља привлачи; али тај ће камен пасти онако исто и кад је воз у кретању. Значи да земља привлачи камен па био он у миру или у кретању.

Овде је привлачна снага земљина утицала управно на правац кретања вагона, па опет није ни уколико измењен њен утицај на камен. Дејство ће остати исто и онда кад бацимо куглу дуж вагона дакле у правцу којим се он креће, било у једном било у другом смислу. Кугла ће се увек на исти начин кретати па било да је вагон у миру или у кретању.

Из тога можемо извести ово врло важно правило:

Дејство силе на неко тело не зависи ни у колико од покретног стања у коме се то тело налази.

Другим речима: *дејство силе на неко тело једно је исто па било да је тело у миру или у кретању*

Или још општије, *кад неки известан број сила дејствује на неко тело, онда ће свака од тих сила произвести исто дејство, које би произвела кад би сама на то тело дејствовала.*

То је *други закон* кретања.

Поред горњих примера који довољно објашњавају други закон кретања да наведемо још и овај:

Ваздушна је лопта на 500 метара висине и креће се у једној ваздушној струји са 15 метара у секунди. Из корпе лоптине, путник испусти једно перо; да ли ће струја то перо да одува или ће перо падати вертикално на ниже као у потпуној тишини?

Путник ће видити да ће се перо врло лагано спуштати вертикално на ниже као да је потпуна тишина; јер ваздушна струја носи и лопту и корпу и све што је у корпи са истом брзином, и путник не осећа никакав ветар, па дакле ће и перо онако исто падати као и да није бачено из корпе која се онако брзо креће. Кретање лопте нема апсолутно никаквог утицаја на падање пера, као год што ни обртање земљино око осе или њено окретање око сунца, нема никаквог утицаја на кретања тела на земљиној површини. Сва тела на земљи крећу се и падају онако исто, као и кад би земља била у потпуном миру. Јер привлачна снага земљина утиче онако исто као кад би она сама дејствовала, и као да друге силе не терају тело да се другим правцима креће.

(Галилео је први оверио овај други закон експериментом. Он је пустио да пада један камен са врха катарке једне лађе, која се̂ кретала једнако и по правој линији и камен је пао код корена катарке онако исто као што би пао кад би лађа била мирна. Пре Галилеа сваки је мислио да ће камен пасти иза катарке и то за онолико за колико се лађа помакла у напред док је тело падало. Из овога се само види од колике су важности експерименти за потврду или исправљање замишљаја чисто философске природе).

С. Дејство и противдејство — Акција и реакција

225. Посматрајући опште особине кретања видели смо, да неко тело не може само собом своје кретање да измени, све док ту измену не изврши какво кретање са стране, дакле кретање које ће доћи од неког другог тела. Уочимо једно тело на столу; ми кажемо да је оно у миру, ма да према ономе што смо рекли за кретање молекила, смемо да замислимо, да се сви делићи тога тела најразноврсније крећу Али та унутрашња кретања нису у стању да покрену тело као целину; за то треба да дејствује каква спољашња страна сила. Међу тим ако се деси да су унутрашње силе довољно велике, онда ће оне моћи да распрсну тело, тако да један део оде на једну а други на другу и сасвим супротну страну. За тај случај каже се, да је количина кретања онога дела што иде на једну страну, управо толика иста, колика је и онога дела што иде на супротну страну.

Објаснимо то примерима.

Замислимо да смо избацили пушку или топ. Прво ћемо том приликом приметити да ће један део тога оружја, т. ј. кугла услед унутрашњих сила (барута) излетети из цеви на једну страну и са извесном брзином. У исти мах приметићемо да ће нас кундак пушке гурнути у раме, или као што се обично каже „пушка се тргла“. На топу ћемо видети да ће се цела цев са лафетом помаћи натраг за један или два корака. И кад би смо тражили ону количину кретања са којом се пушка или топ тргао натраг, нашли би, да је она онолика иста, колика је била и она што је пушчано тане или топовско зрно избацила; т. ј. производ из масе и брзине зрна, онолики је исти, колики и производ из брзине и масе топовске цеви са лафетом.

Овај нам пример показује да је дејство унутарње силе (барута) било једнако и у једном и у другом (супротном) правцу. То се обично каже *дејство и противдејство су једнаки* или *акција је равна реакцији* и то је *трећи* закон о силама.

Узмимо други један пример. Пустимо да падне камен на земљу; после извесног времена, камен ће услед привлачења земљиног стећи извесну брзину. Али као год што земља привлачи камен, тако исто и камен привлачи земљу, те ће се у исти мах и земља са извесном брзином кретати према камену и то са толиком брзином, да производ из масе целе земље и брзине буде раван производу из брзине тела и његове масе. Па како је маса земљина према маси тела бескрајно велика за то ће и брзина земље према брзини камена бити бескрајно мала те се неће ни приметити. Али количине кретања и земље и камена су сасвим једнаке.

Или утврдимо топ вертикално у земљу и избацимо га. С једне стране ће ђуле полетети у висину са извесном количином кретања, с друге стране она снага, која је мало час цео топ са лафетом тргла, тежи да покрене целу земљу у супротном правцу кретања ђулета. И она ће је заиста и покренути, само ће брзина и пут тога кретања услед бескрајно велике масе земљине бити бескрајно мали.

Исто се то дешава, и кад човек скочи у висину. Мишићна снага, која човека тера у вис може се упоредити са снагом барута што је мало час отерала ђуле у висину, а земља ће се у оба случаја измаћи на ниже. Само се њено кретање ни сад неће моћи приметити.

Тим законом да је дејство равно противдејству, дају се многе појаве објаснити.

Замислимо да смо избацили из топа бомбу брзином од 200 метара. Узећемо да бомба прсне у лету и то тако (што се у осталом и дешава) да јој један комад оде у истом правцу у ком се цела бомба кретала и то са брзином за 200 метара још већом. Друга половина бомбе мора полетети натраг са брзином од истих 200 метара, (што долазе од распрскавања бомбе). Али пошто се та половина креће напред са истом брзином, онда ће се те две брзине као једнаке и супротног смисла просто потрти, и друга ће половина бомбе пасти онде, где се бомба распрсла, а прва ће наставити пут са брзином од 400 метара.

Ако је маса бомбе била $= 10$ онда је количина кретања бомбе пре експлозије била 10×200; после експлозије она половина што је наставила кретање брзином од 400 мет. имала је исту количину кретања

$\frac{10}{2} \times 400$. Сва је разлика у томе, што се пре експозије цела бомба кретала брзином од 200 метара, а после експлозије само се једна половина бомбе креће двогубом брзином.

Више се пута дешава да се противдејство не јавља у облику кретања већ само као притисак, али оно ипак постоји, само у другом облику. — —

*

Пошто смо видели какви закони вреде о кретању у опште кад га изазивају стране силе, онда да видимо какве су још последице од дејства разних сила.

Сила као што смо напред дознали, може дејствовати тренутно и стално на неко тело и у оба случаја резултујуће дејство неће бити исто. Да испитамо оба та случаја.

D. Кретање тела услед тренутног дејства стране силе

226. Било да је то тело у кретању и миру кад на њ' утиче каква страна сила само једног тренутка, дакле за врло кратко време (на пр. код судара) онда ће она изменити кретање тела и по правцу и по величини и по смислу, према томе какав буде био правац величина и смисао и силе и кретања тела. Али услед тога, што је сила тренутна, свако њено даље дејство престаје, па дакле престаје и свака даља промена кретања и тело ће се после престанка силе кретати са оном брзином коју је имало у тренутку кад је сила престала да дејствује задржавајући је за све даље време кретања.

Према томе *кретање услед тренутног дејства стране силе биће једнако и по правој линији.*

E. Кретање тела услед трајног дејства стране силе.

227. Правац силе је исти са правцем брзине покретног тела. — Рецимо да се нека материјална тачка М. креће извесном брзином c и по правој линији. Кад не би даље утицала никаква страна сила, тачка би се непрестано кретала једнако и по правој линији са брзином c.

Пустимо да на тачку М дејствује каква сила стална и по правцу и по величини; да би ствар била простија рецимо да сила дејствује правцем брзине c. Што се тиче смисла дејства силе он може бити или исти са смислом брзине c или противан њему.

Пошто је та сила дејствовала једну целу сукунду, она ће саопштити телу неко извесно убрзање a тако да ће на крају прве секунде дејствовања силе, цела брзина бити c + a. Количина a биће наравно положна или одречна, према томе да ли је смисао силе био исти са c или противан њему.

Кад би на крају те прве секунде, сила престала да дејствује, тачка би наставила кретање са том брзином c + a и њом би се кретала једнако и по правој линији.

Али рекли смо да сила дејствује непрестано са истом снагом; она ће дакле на крају друге секунде повећати убрзање још за a дакле свега за 2a; јер је дејство силе по другом закону кретања сасвим исто, па било да се тачка креће само са брзином c или са c + a. Целокупна брзина тачке на крају друге секунде биће c + 2a

Кад би сила сад, на крају друге секунде престала, тело би одмах наставило своје кретање једнаком брзином c + 2a. Но како сила и даље дејствује, она ће кретање изменити за још једно убрзање a, свега 3a и крајња брзина тачке, на крају треће секунде дејствовања силе биће c + 3a

Из овога разматрања видимо, да што дуже сила дејствује, у толико се више брзина мења, и промена престане само онда кад и дејство силе престане. Дакле

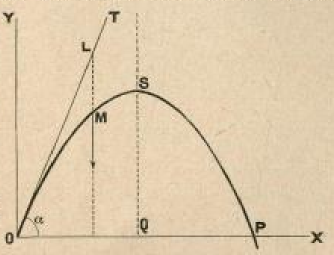
Кад нека сила стална и по правцу и по величини дејствује непрестано или трајно на неко тело па било да је без почетне брзине или са почетном брзином у правцу силе, онда ће та сила произвести једнако променљиво и праволинијско кретање.

Ако је смисао силе исти са смислом брзине, кретање је једнако убрзано, јер је убрзање a положно. На против, кретање је једнако, успорено, кад је смисао силе супротан смислу брзине c, јер је a одречно.

228. Правац силе није исти са правцем брзине покретног тела. — Видели смо какав је резултат био кад је дејствовала стална сила у истом правцу са правцем брзине покретног тела. А сад да узмемо да правац силе заклапа ма какав угао са правцем сталне брзине.

Чим дејствује сила стална по правцу и по величини на неко тело, али тако да правац силе није у истом правцу са почетном брзином тела, онда резултујуће кретање није више право.

Узмимо две правоугле осе OX и OY (сл. 79), кроз почетак O, из ког полази покретна тачка. Нека је оса OY паралелна са правцем којим дејствује сила, и нека почетна брзина тела c иде правцем OT тако да правац те брзине, заклапа са осом OX угао α.



Сл. 79.

Кад не би било никакве силе, материјална би тачка ишла путањом OT једнаким кретањем, и после времена t од поласка, пут би јој био на пример $OL = ct$. Координате тачке биле би

$$x = ct \cos \alpha \quad \text{и} \quad y = ct \sin \alpha.$$

Кад сад придође дејство силе паралелно са OY и то у смислу од Y ка O, онда ће се кретање тачке знатно изменити. Услед трајног дејства силе, тачка ће поред једнаког свог кретања добити још једно једнако убрзано кретање, и ако је убрзање тог кретања a, онда ће тачка услед тога убрзаног кретања пређи пут LM паралелан са YO тако да је

$$LM = \frac{at^2}{2}$$

Дакле пра̂ва ордината покретне тачке биће на крају времена t она, коју би тачка имала, кад никаква сила на њу не би дејствовала $(ct \sin \alpha)$ смањена за $\frac{at^2}{2}$. Према томе пра̂ве координате покретне тачке биће:

$$x = ct \cos \alpha$$

$$y = ct \sin \alpha - \frac{at^2}{2}$$

Да би нашли геометријску природу путање ваља да избацимо време t; Пошто вредност за

$$t = \frac{x}{c \cos \alpha}$$

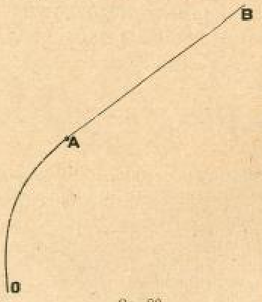
из прве једначине заменимо у другој, добићемо

$$y = x \operatorname{tang} \alpha - \frac{a x^2}{2 c^2} \cdot \frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (117$$

Ова једначина представља једну криву линију и то у овом случају *параболу* које је оса SQ паралелна са YO.

Према томе: *Кад на покретно тело, које се креће сталном брзином, утиче нека стална сила, које правац није исти са правцем почетне брзине, онда је путања покретног тела крива линија.*

229. Кад се тело већ креће по кривој линији, онда значи, да на њега утиче ма каква трајна сила. Онда би се могли запитати, какво ће кретање настати кад сила престане да дејствује? — По првом закону кретања знамо, да ће тело наставити свој пут са истом брзином и по правцу и по величини. Према томе *кретање је*, пошто се дешава без утицаја страних сила и *једнако и праволинијско а брзина је и по правцу и по бројној вредности она, коју је имало оно криволинијско кретање у тренутку кад је сила престала да дејствује.*



Сл. 80.

Та права линија, која представља путању тела, пошто је сила престала да дејствује, јесте у исти мах, тангента, на криву линију, а у тачки где се десило тело кад је сила престала. На пример сила је престала онда кад је тело дошло у А (сл. 80); онда је АВ његова даља путања а у исти мах је АВ и тангента на криву ОА а у тачки А.

230. *Примедба на досадање законе о кретању.* — Истражујући она три основна закона о кретању, ми смо посматрали, ради веће простоте задатка, увек тако тело,

кога смо могли димензије да занемаримо, т. ј. посматрали смо, кретања *материјалне тачке*. Међу тим ти закони вреде и онда, кад је посматрано тело ма колких димензија, само ако је његово кретање такво, да су брзине па дакле и убрзања његових разних тачака иста у истом тренутку. Под том резервом, сви горњи закони вреде за кретања тела ма каквих димензија, само ако су путања, брзина и убрзање целог покретног тела иста, колика је путања, брзина и убрзање ма које његове тачке, рецимо његовог тежишта.

И кад у будуће будемо говорили о путањи, брзини и убрзању тела, увек ћемо подразумевати или да се његове димензије дају занемарити, или да се сви делови тога тела на исти начин крећу.

Врсте сила.

231. Пошто је свака сила представљена количином убрзања m a, то ће врста силе зависити од врсте материје која је у том изразу. Па како смо још у почетку видели, да нам се сва материја у природи јавља или у облику тела, или у облику молекила, атома и ћелија, то ћемо према томе имати ове врсте сила:

I. Кад у изразу $P = ma$, m значи масу целог једног тела, онда се таква сила зове *механичка сила*. Њу налазимо на пр. код свију тела кад се сударају.

II. Ако у изразу $P = ma$, m значи масу молекила, онда имамо посла са *молекилским или физичким силама*.

III. Кад m значи масу атома у изразу за силу, онда је то атомска или хемијска сила.

IV. Кад најзад m значи масу ћелија, онда имамо посла са *биљним* и *животињским силама* или у опште са *бијолошким* силама.

232. *Примери.* Колика је сила потребна, да једном телу од 50 кгр. тежине саопшти брзину од 1·57 мет.? Овде се разуме тренутна сила, за то ће бити из

$$P = MC = \frac{Q}{g} \cdot C = \frac{50 \times 1{\cdot}57}{9{\cdot}81} = 8 \text{ кгр.}$$

Колика ће бити брзина једне кугле од 12 кгр. кад о њу удари снага од 600 кгр.?

$$C = \frac{P}{M} = \frac{P \cdot g}{Q} = 490{\cdot}5 \text{ м.}$$

— Једно тело од 25 кгр. тежине, и 8·125 мет. брзине сударя се са једним телом од 16 кгр. и преда му сву своју количину кретања. Колика ће брзина бити овог последњег тела?

$$M_1 : M_2 = C_2 : C_1$$

или

$$Q_1 : Q_2 = C_2 : C_1;\ 26 : 16 = x : 8{\cdot}125;\ x = 13{\cdot}5\ \mathrm{m}.$$

Пушчано зрно од 50 гр. има брзину од 450 мет. а топовска кугла од 6 кгр. има брзину од 690 мет. Колико је пута покрета сила већа код топовске кугле?

$$P_1 : P_2 = M_1 C_1 : M_2 C_2$$

или

$$1 : P_2 = 0{\cdot}05 \times 450 : 6 \times 690.\ P_2 = 184.$$

Кад на једно тело од 50 кгр. дејствује трајна сила од 10 кгр. колико ће бити његово убрзање?

$$a = \frac{P}{M} = \frac{Pg}{Q} = 1{\cdot}962.$$

Једно тело, кога је запремина 10 куб. метара и специф. тежина 0·5, добије услед неке силе 4·905 m убрзања. a) Колика је покретна сила? b) Колика би пак та сила била кад би спец. тежина тога тела била 11·4? — Тежина тела је

$$Q = 10 \times 0{\cdot}5 = 5\ \text{кгр.}$$

Према томе

$$P = \frac{Q \cdot a}{g} = 2\frac{1}{2}\ \text{кгр.}$$

$$\text{b)}\ M_1 : M_2 = 0{\cdot}5 : 11{\cdot}4;\ 2{\cdot}5 : P_2 = 0{\cdot}5 : 11{\cdot}4;\ P_2 = 57\ \text{кгр.}$$

Колики притисак дејствује на нашу руку, кад са теретом од 2 кгр. и са убрзањем од 0·5 кренемо руку a) на више; b) на ниже? c) са коликим убрзањем ваља кретати руку на више, па да осетимо два пут већи притисак? d) са каквом пак на ниже, па да никакав притисак тела не осетимо? a) Маса тела које држимо у руци јесте

$$M = \frac{2}{9{\cdot}81}.$$

Кад то тело крећемо на више, са убрзањем 0·5, онда на основу трећег закона о силама, рука ће осетити толики притисак, колики добијамо кад масу тела тела помножимо са збиром убрзања т. j.

$$P_1 = \frac{2}{9{\cdot}81}(9{\cdot}81 + 0{\cdot}5) = 2{\cdot}102.$$

b) Крећемо ли руку на ниже онда је

$$P_2 = \frac{2}{9 \cdot 81} (9 \cdot 81 - 0 \cdot 5) = 1.898.$$

c) На исти начин добићемо да на руку притискује два пут већа сила, кад је крећемо на више убрзањем 9·81 мет. d) Ако хоћемо да на руци не осетимо никакав притисак, ваља да је измичемо са истим убрзањем g на ниже. — Отпор трења и ваздуха износи за један жељезнички воз $\frac{1}{200}$ терета. a) После ког времена ће се један воз од 60000 кгр. зауставити пошто се пара заустави, кад је пут хоризонталан и воз има средњу брзину од 8 m? b) Колико је успоравање? c) Колики ће пут прећи воз за то време? a) Из обрасца $Pt = mv$ имамо $t = \frac{Qv}{P \cdot g}$ кад заменимо одговарајуће бројне вредности ставивши за

$$\frac{Q}{P} = \frac{200}{1} = 200.$$

имамо

$$t = \frac{200 \cdot 8}{9 \cdot 81} = 163 \text{ сек.}$$

$$\text{b) } a = \frac{8}{163} = \text{од прилике 5 cm. на секунду.}$$

$$\text{c) } s = \frac{v^2}{2a} t = \frac{8^2}{2 \cdot 8} \cdot 163 = 652 \text{ мет.}$$

II. РАД

233. Кад каква радна сила дејствује на неко тело масе *m* па је довољно јака да савлада све отпорне силе, она ће саопштити телу неко извесно кретање услед кога ће то тело прећи неки известан пут = s. По себи се разуме, да ће дејство силе бити у толико веће, у колико је тај пут био дужи. И величина тога дејства радне силе мери се производом из силе и пута; тај се производ зове *рад* силе. Дакле рад је

$$R = Ps = am \cdot s \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (118$$

Према томе за вршење рада треба две ствари: сила и њоме произведено кретање; где једног од тога двога нема, нема ни рада. У свима оним случајевима где сила само одржава равнотежу неком отпору, па ма како тај отпор био јак, нема рада. Рад се дакле не може произвести мирним притиском или вучењем, него кретањем препоне и савлађивањем отпора.

Рад који се утроши на савлађивање неког отпора зове се *потрошени* или *консумирани рад*; рад пак који је сила произвела назива се *произведени* или *продуцирани* рад.

Кад на пример подигнемо једно тело у висину, ми његову тежину (дакле силу) премештамо и тиме извесан рад вршимо. Кад тело крећемо по хоризонталној путањи, онда истина не издижемо његову тежину, али савлађујемо отпор трења о подлогу и тиме опет рад вршимо; кад цепамо какво дрво, савлађујемо кохезионе молекилске снаге, кад затежемо жицу савлађујемо њену еластичност и т. д.

А. Рад у опште.

234. Најпростији случај рада јесте кад једно тело подижемо вертикално у вис, јер пређени пут пада у исти правац са силом. Пошто у том случају савлађујемо тежину тела, на неком исвесном путу, који се мери метрима, то се и величина утрошеног рада представља у метаркилограмима, просто производом из тежине подигнутог тела и метрима израженог пута. На пример један килограм, подигнут 10 метара високо, представља рад од 10 мет. килогр. онако исто као што би 10 килограма подигнута на један метар, или 2 килограма на 5 метара представљали такође рад од 10 мет. килогр.

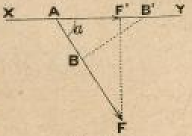
Ако се тело, на које дејствује нека сила креће у смислу у ком сила дејствује, онда се каже да је тај рад *моторни рад*, *покретач*, или *положни рад*. $(R = + Ps)$.

Ако се пак кретање тела дешава у супротном смислу, саме силе, онда је то *отпорни рад*, и сматра се као *одречан рад* $(R = - Ps)$.

Тако на пример један терет од 10 килограма, који пада са висине од 3 метра, представља моторни рад, $(R = + 30$ мет. кил.$)$ док на против кад се исти терет подиже у вис за 3 метра, врши се отпорни рад $(R = -$ 30 мет. кил.$)$.

Рад од једног колограмметра јесте практична јединица за рад и многи јој дају име „*динамија*“.

235. Рад је раван производу из силе и пута само онда, кад се тело креће истим правцем којим дејствује и сила. Међу тим може да се деси, да једна сила $P = AF$ стална по величини и правцу дејствује тако на неко тело, да се оно не креће истим правцем него се креће по правој линији XY која са правцем силе заклапа неки угао α. (сл. 81).



Сл. 81.

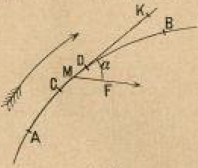
У таквом случају, *рад је раван производу из силе, пута и косинуса угла, који заклапа правац силе са правцем пута.* Према томе биће образац за рад.

$$R = P \cdot s \cdot \cos\alpha \quad \cdots\cdots\cdots \quad (119$$

Кад буде $\alpha = 0$, онда имамо $R = Ps$, а то је пређашњи случај, где је рад положан; буде ли $\alpha = 180$, $R = -Ps$. Ако је $\alpha = 90$, $R = 0$. Дакле *сила која дејствује управно на правац, којим се неко тело креће, не врши никакав рад.*

Кад спустимо управне $B'B$ и FF' добијамо пројекцију AB пута AB' на силу, а такође и пројекцију AF' силе AF на пут. Из оба правоугла троугла излази да се косинусом угла α одређују те пројекције, те према томе рад се може у овом случају дефинисати другојаче и то

Кад правац силе заклапа неки известан угао са правцем пута, онда је рад раван



Сл. 82

или сили помноженој са пројекцијом пута на њу.

$$R = AF \cdot AB = P \cdot AB$$

или путу помноженом са пројекцијом силе на њ.

$$R = AB' \cdot AF' = s \cdot AF'.$$

јер је $P\cos\alpha = AF'$ а $s\cos\alpha = AB$.

Посматрајмо сада најопштији случај постанка рада. Узмимо једну силу $P = MF$ (сл. 82), која се може мењати и по правцу и по величини, да дејствује на неко тело, које описује ма какву путању, праву или криву AB. Поделимо један део те путање AB на врло велики број елементарних путања као што је на пример CD, тако да сваку од тих ситних путања можемо сматрати као праву линију и да сила за врло кратко време, док ту путањицу пређе не буде имала кад да се промени, те дакле да остане стална и по правцу и по величини.

У том случају рад сваког од тих елемената орећен је по прећашњим привилима: он је раван производу из дужине σ сваког елемента и пројекције силе на њ; тај се рад зове *елементаран рад*. Ако тај рад означимо са ϱ, ако је α угао који заклапа сила са елементом путање, т. ј. са тангентом MK повученом на тачку M где се налази покретна тачка, онда имамо да је

$$\varrho = \mathrm{P} \cdot \sigma \cos \alpha = \mathrm{P}\sigma'$$

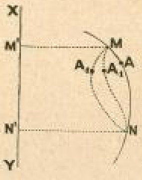
кад са σ' означимо пројекцију елементарног пута на силу.

Пошто знамо да одредимо елементарне радове појединих делова путање, можемо одредити *цео* или *тотални рад* између A и B кад алгебарски саберемо елементарне радове $\varrho_1\, \varrho_2\, \varrho_3 \cdot \cdot \cdot \varrho_n$ свију n елемената на које смо поделили путању AB. Онда ће бити

$$\mathrm{R} = \varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 + \cdot \cdot \cdot \varrho_n = \Sigma\,(\varrho)$$
$$= \Sigma\,(\mathrm{P}\sigma \cos \alpha) = \Sigma\,(\mathrm{P}\sigma') \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (120)$$

Објаснимо то примерима:

236. — 1. Узмимо најпре да је сила непрестано управна на елементе путање, које описује њена нападна тачка: сваки елементарни рад раван је нули; очевидно да је и *тотални рад раван нули.*



Сл. 83

Тако дакле кад неко тело везано о конац окрећемо у кругу (као код праћке), сила која дејствује на тело и проводи кружну путању, јесте затегнутост конца. Та сила, управљена увек правцем полупречника, за све време кретања остаје управна на тангенту сваке тачке: *рад затегнутости конца раван је нули.*

237. — 2. Стална сила и по правцу и по величини дејствује на неко тело, које се креће по ма каквој кривој линији MN (сл. 83). Колики је рад силе на путу MN? Ми ћемо и овде као и мало

час замислити путању подељену на n ситних елемената дужине $\sigma_1\ \sigma_2\ \sigma_3 \cdot \cdot \cdot \sigma_n$. Ако правац силе иде правцем XY, ми ћемо сваки елеменат пројицирати на силу и добити n елементарних пројекција дужине $\sigma_1'\ \sigma_2'\ \sigma_3' \cdot \cdot \cdot \sigma_n'$. Тотални рад биће очевидно

$$R = P\sigma_1' + P\sigma_2' + P\sigma_3' + \cdot \cdot \cdot P\sigma_n'$$

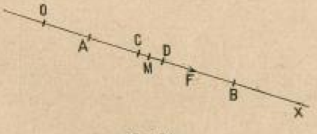
$$= P\,(\sigma_1' + \sigma_2' + \sigma_3' + \cdot \cdot \cdot \sigma_n')$$

Збир свију елементарних пројекција у загради, није ништа друго до цела пројекција M'N' целе путање MN, коју ако означимо са s' имаћемо тоталан рад

$$R = P \cdot s'.$$

који је раван производу из сталне силе и пројекције целе путање на њу, па била путања права или крива.

Међу тим из слике се види да рад такве једне силе по правцу, не зависи од истински пређеног пута M N, јер пројекција M'N' остаје иста па кретала се тачка путањом MAN, или MA_1N или MA_2N или ма каквом другом путањом која би прошла кроз M и N. Према томе било да неко тело пада вертикално на ниже, било да пада по ма каквој кривој линији, као што то бива кад тело косо бацимо (оно пада по парабљли) или да клизи по некој нагнутој површини, рад који ће то тело извршити, увек је један исти и раван његовој тежини помноженој са висином са које пада.



Сл. 84.

238. — 3. Узмимо још један пример, који се примењује у електрицитету. Сила P има сталан правац али јој се интензитет мења и то изврнуто квадрату одстојања т. ј.

$$P = \frac{q}{r^2}$$

где q представља једну сталну количину, а r промењљиво остојање нападне тачке M од неке сталне тачко O (сл. 84.) узете у самом правцу силе. Одредимо рад извршен на делу AB путање OMX; тога ради тражићемо елементаран рад ϱ извршен на елементу CD. Означимо са r остојање OC а са r_1 остојање OD; сила у почетку C тога елемента има вредност $\frac{q}{r^2}$ а на крају D њена је вредност $\frac{q}{r_1^2}$. Ми смо видели напред да не можемо сматрати да је сила остала стална на целом елементу CD, па било да за ту сталну вредност узмемо почетну $\frac{q}{r^2}$ или крајњу $\frac{q}{r_1^2}$ било ма коју другу између њих. Па за то узмимо за ту сталну вредност силе њену средњу геометријску вредност

$$\sqrt{\frac{q}{r^2} \cdot \frac{q}{r_1^2}} = \frac{q}{rr_1}$$

између почетне и крајње вредности. Онда ће елементарни рад бити:

$$\varrho = P\,(r_1 - r) = \frac{q}{rr_1}(r_1 - r) = \frac{q}{r} - \frac{q}{r_1}.$$

Ако са $\varrho_1\, \varrho_2\, \varrho_3 \cdot \cdot \cdot \varrho_n$ означимо елементарне радове свију n елемената на које смо поделили целу путању AB; ако са $r_0\, r_1\, r_2\, r_3 \cdot \cdot \cdot r_n$ означимо одстојања почетака односно крајева сваке елементарне путање од тачке O онда ћемо имати

$$\varrho_1 = \frac{q}{r_0} - \frac{q}{r_1}$$

$$\varrho_2 = \frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2}$$

$$\varrho_3 = \frac{q}{r_2} - \frac{q}{r_3}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\varrho_n = \frac{q}{r_{n-1}} - \frac{q}{r_n}$$

Тоталан рад биће

$$R = \varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 + \cdot \cdot \cdot \varrho_n = \frac{q}{r_0} - \frac{q}{r_n} = q\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_n}\right) \quad (121$$

Пеђу тим r_0 и r_n су остојања тачака A и B путање од O. Према томе врло прост израз

$$\frac{q}{r_0} - \frac{q}{r_n}$$

представља тоталан рад на целом пређеном путу покретне тачке, између A и B, па ма како ситни били елементи, на које смо ми њу поделили.

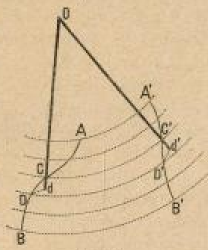
B. Рад централних сила.

239. *Централним се силама* називају оне силе, које су увек управљене једној истој тачки, *(центру* или *средишту)* па ма какав био положај покретне тачке на коју те силе дејствују; величина тих сила зависи од одстојања њихових нападних тачака од средишта.

У природи имамо много примера централних сила; тако на пример привлачење сунца на земљу је сила увек управљена према средишту сунчевом, па ма где се земља налазила на својој путањи; интензитет те силе изврнуто је сразмеран квадрату одстојања: то је дакле централна или средишна сила.

Ево какав закон вреди за рад такве једне силе.

Рад једне централне или средишне силе, које се нападна тачка премешта ма на кој начин, зависи само од почетног и крајњег одстојања те нападне тачке од средишта.



Сл. 85.

Нека је тачка O центар, тачка A (сл. 85) почетно а тачка B крајње одстојање нападне тачке, која се креће по путањи ACB. Рад силе, која је непрестано управљена према средишту O, биће исти па било да покретна тачка пође из A па преко C дође у B, било да пође из A' и оде у B' путањом A'C'B', само ако су A и A' као B и B' на истим даљинама од центра.

У опште узевши, рад ће остати увек исти, па ма којим путем тачка са остојања OA буде отишла на даљину OB.

У осталом видимо да је овај закон о раду централних сила последица случаја, које смо имали у примеру 2 и 3. оба узета заједно.

Ако је рад положан, кад се покретна тачка удаљује од средишта, (а то ће бити кад је сила која излази из O, одбојна или репулсивна) рад ће бити одречан кад се покретна тачка приближује средишту. На против, ако је рад био одречан кад се покретна тачка удаљује од средишта (а то ће бити кад је централна сила привлачна) онда ће рад бити положан кад се тачка приближује центру.

Из тога следује, да кад покретна тачка, пошто се кретала по извесној путањи дође на исту даљину од средишта, цео њен рад раван је нули.

У опште, *кад се нека тачка изложена дејству централних сила врати у почетну тачку свога пута, тоталан њен рад раван је нули.*

C. Рад унутрашњих сила.

240. Једно тело, или један скуп тела може се сматрати као систем материјалних тачака изложен: 1° силама које дејствују између појединих тачака самога система, узете две по две. На основу закона да је акција равна реакцији, ове су силе једнаке и супротног смисла, налазе се у правој која саставља обе тачке, и зависе само од остојања тих тачака; оне се зову *унутрашње силе.* — 2° силама које долазе од тела која су ван система; то су *спољашње силе.*

Као пример узмимо да је неко тешко тело обешено о конац; разне тачке тога тела, које ће бити сада наш систем тачака, изложене су својим тежинама, дакле *спољашњим силама* јер оне све полазе из земље, која је изван нашега система; осим тога те су тачке изложене молекилским силама, које сметају појединим деловима тела да се раставе под утицајем њихових тежина; те молекилске силе су *унутрашње силе.*

Готово сви радови, које смо до сад посматрали, били су радови спољашњих сила.

Што се унутрашњих сила тиче, нама у опште није позната ни величина, ни правац ни смисао њихов, па дакле ни рад сваке поједине унутрашње силе кад се њихове нападне тачке крећу, не знамо. Међу тим рачун *алгебарских сума* појединих елементарних радова унутрашњих сила помаже нам врло често да тај унутарњи рад одредимо и то на основу ове теореме:

Алгебарски збир радова унутрашњих сила некога система, зависи само од релативних положаја разних материјалних тачака система у почетку и на крају посматраног кретања.

Ова је теорема само последица она два случаја, где је сила била стална по правцу а променљива по величини, и где је одређиван рад централних сила. Јер да нађемо рад неке материјалне тачке, била она изложена спољашњим или унутрашњим силама, потребно нам је да знамо њен почетни и крајњи положај па ма какав био геометријски облик путање по коме је она из једног положаја дошла у други. То што вреди за једну тачку у систему вреди и за сваку другу посебице па и за њихов алгебарски збир.

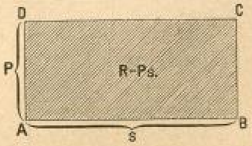
Према томе, кад знамо почетне и крајње релативне положаје тачака у систему, нама нису потребни они положаји кроз које су поједине тачке пролазиле док су своје крајње положаје заузеле. Јер ако су у двема разним променама система, почетни положаји тачака и крајњи њихови положаји једни према другима остали исти, алгебарска сума унутрашњих је радова сасвим иста, ма да су путови за пролазак из општег почетног стања у опште крајње стање система били сасвим различити.

Другим речима: *ако систем за време вршења унутрашњих радова није деформисан*, т. ј. ако су релативни положаји појединих тачака у почетку и на крају кретања остали исти, *алгебарски збир унутрашњих радова је увек раван нули.*

Овај закон служи као теоријска основица целој калориметрији а нарочито термохемији.

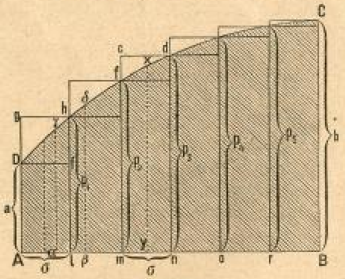
D. Графичко представљање радова.

241. Пошто је у најпростијем случају рад производ из силе и пута, онда се он може графички представити површином једног правоугаоника, чија основица одговара путу а висина сталној сили P (сталном отпору) која је на путу s радила (сл. 86).



Сл. 86.

Ако сила није стална онда ћемо поделити путању од почетка до краја на веома ситне делиће т. ј. на елементарне путове тако да смемо претпоставити да сила, док прелази такав један делић није имала кад да се промени, те дакле да је на њему била стална. Међу тим на свакој другој елементарној путањи сила је друге вредности. И ако знамо закон, по коме се сила мења, ми ћемо њен тотalан рад моћи представити површином ABCD (сл. 87), кад праву AB = s која нам представља целу путању, поделимо на n једнаких делића као што су Al, lm, or, и т. д.; (сваки тај делић представља елементарну путању



Сл. 87.

$= \sigma$), кад на сваком том делићу подигнемо управне по дужини равне силама, које су дејствовале на сваком том елементарном путу и кад крајње тачке тих управних саставимо једном, у сваком таквом случају, кривом линијом.

Испитајмо рад такве једне промењиве силе на елементарном путу $mn = \sigma$; сила се од почетка до краја тог елемента променила од p_2 на p_3, т. ј. од fm на dn, за величину cf. Да је сила p_2 остала на том елем путу непромењена, њен би рад био представљен елементарним правоугаоником $fn = p_2 \sigma$; на против да је сила још у почетку тог елем. пута била $= p_3$, рад би њен био раван елем. правоугаонику $cn = p_3 \sigma$. Прави дакле рад мора бити већи од $p_2 \sigma$ али мањи од $p_3 \sigma$ и одговарати свакако производу $xy \cdot mn$, где xy значи средњу брзину састављену из обеју крајњих. Исто је тако елементарни правоугаоник $Dl = a\sigma$ мањи а елем. правоугаоник $gl = p_1 \sigma$ већи од правог извршеног рада на првом елем. путу Al, који би свакако добили кад би елем. пут $Al = \sigma$ помножили средњом вредношћу сила a и p_1.

Пошто ово посматрање вреди за сваки елементарни део путање, то ћемо тотални рад добити из површине $ABCD$ којој је основица пређени пут s, и која је са осталих страна ограничена почетним и крајњим интензитетом променљиве силе (a и b) и кривом линијом DC, која представља закон по коме су се интензитети силе мењали на целом путу s.

242. Рачунским путем наћићемо тоталан рад такве променљиве силе, кад скупимо површине свију оних елементарних трапеза у једно. Тако на пример површина првог елементарног трапеза биће:

$$f_1 = \frac{1}{2} \sigma (a + p_1)$$

другог:

$$f_2 = \frac{1}{2} \sigma (p_1 + p_2)$$

оних осталих:

$$f_3 = \frac{1}{2} \sigma (p_2 + p_3)$$

$$f_4 = \frac{1}{2} \sigma (p_3 + p_4)$$

$$f_5 = \frac{1}{2} \sigma (p_4 + p_5)$$

$$f_6 = \frac{1}{2} \sigma (p_5 + p_6)$$

Збир њихов биће очевидно:

$$F = \frac{1}{2}\sigma(a + b + 2p_1 + 2p_2 + 2p_3 + 2p_4 + 2p_5)$$

Ова се једначина може и овако написати:

$$F = \sigma\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2} + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5\right) \cdot \cdot \cdot \cdot (122$$

Ако број елементарних трапеза на које смо целу површину поделили износи n т. ј. ако је $\sigma = \frac{AB}{n} = \frac{s}{n}$ онда је рад променљиве силе представљен овом једначином:

$$R = Ps = \frac{s}{n}\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + p_1 + p_2 + p_3 + \cdot \cdot + p_{n-1}\right) (122'$$

243. Још ћемо тачнији израз добити за рад променљиве силе по тако званом *Симпсоновом правилу*, које ћемо на овај начин извести:

Узмимо најпре онај простор дате површине који се налази између граничне ординате a и ординате p_2 па поделимо њихово растојање (Am) на три једнака дела. $(A\alpha = \alpha\beta = \beta m)$. По себи се разуме, да ће сада површина ограничена ординатама AD и mf тачније бити одређена кад је подељена на три елементарна трапеза него мало час кад их је било само два. И кад се послужимо горе нађеним правилом имаћемо:

$$f_1 = \frac{A\alpha}{2}(AD + mf + 2\alpha\gamma + 2\beta\delta)$$

но пошто је:

$$A\alpha = \frac{Am}{3} = \frac{2\sigma}{3}$$

услед чега је

$$\frac{A\alpha}{2} = \frac{\sigma}{3}$$

то је онда

$$f_1 = \frac{\sigma}{3}(a + p_2 + 2\alpha\gamma + 2\beta\delta).$$

Из геометрије се зна да је:

$$1h = \frac{\alpha\gamma + \beta\delta}{2}$$

или

$$2\,1h = 2\,p_1 = \alpha\gamma + \beta\delta.$$

Кад целу једначину помножимо са 2,

$$4\,p_1 = 2\alpha\gamma + 2\beta\delta$$

те према томе:

$$f_1 = \frac{\sigma}{3}(a + p_2 + 4\,p_1).$$

На исти начин добићемо за ону површину обухваћену између p_2 и p_4 као и између p_4 и b сличне изразе:

$$f_2 = \frac{\sigma}{3}(p_2 + p_4 + 4\,p_3)$$

$$f_3 = \frac{\sigma}{3}(p_4 + b + 4\,p_5).$$

Све три пак даће тражени рад променљиве силе представљен по Симпсоновом правилу површином:

$$F = P\,s = \frac{\sigma}{3}(a + b + 4\,p_1 + 2\,p_2 + 4\,p_3 + 2\,p_4 + 4\,p_5) \quad \cdot \quad \cdot \; (123$$

а то значи:

Ако тражимо рад какве променљиве силе представљен графички површином ограниченом апсцисом, двема ординатама и ма каквом кривом линијом, онда ваља *апсцису поделити на што већи паран број једнаких делова, подићи на поделним тачкама до пресека са кривом линијом ординате, и помножити трећину раздаљине између сваке две ординате,* $\left(\frac{\sigma}{3}\right)$ *са збиром граничних* $(a + b)$, *удво-*

јених парних $(2\,p_2 + 2\,p_4)$ *и четвороструких непарних* $(4\,p_1 + 4\,p_3 + 4\,p_5)$ *ордината*.

Ако је број подела $= n$, и ако у место σ ставимо $\frac{s}{n}$ онда се горња једначина за парно n може и овако написати

$$R = P\,s = \frac{s}{3\,n}\,(a + b + 4\,p_1 + 2\,p_2 + 4\,p_3 + 2\,p_4 + \cdots$$

$$\cdots + 2\,p_{n-2} + 4\,p_{n-1}) \cdots (123'$$

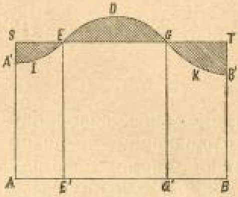
Кад би n било непарно, онда та иста једначина добија овај облик:

$$R = P\,s = \frac{s}{n}\left[\left(\frac{3}{8}\,a + 3\,p_1 + 3\,p_2 + p_3\right) + \frac{1}{3}\left(p_3 + 4\,p_4 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + 2\,p_5 + \cdots\cdots + 4\,p_{n-1} + b\right)\right] \cdots (124$$

244. *Средњи сталан напор или јачина променљиве силе.* — Средњи сталан напор променљиве силе назива се онај напор, који би произвео на истом путу онај исти рад, који производи и променљива сила. Ако је R рад који даје на неком путу s променљива сила P, и ако средњу сталну јачину силе означимо са N онда мора да буде

$$R = N\,s, \quad \text{одакле} \quad N = \frac{R}{s} \cdots\cdots (125$$



Сл. 88.

Тај се дакле средњи сталан напор добија, поделом целокупнога рада променљиве силе, путом.

Кад би графички представили оба та рада, онда би они изгледали као на сл. 88. Површина AA'EDGB'B представља рад променљиве силе. На против правоугаоник ASTB представља рад, који даје средњи сталан напор те променљиве силе. Обе те површине па дакле и оба рада су потпуно једнака. Ордината AS није ништа друго до тај средњи сталан напор променљиве силе (N). Из слике се види, како променљива сила на целом путу два пут задобија ту вредност средњега напора и то код EE' и GG'.

E. Ефект.

245. За опште одређивање рада једне силе, није потребно водити рачуна о времену за које је тај рад извршен; на против у практици није све једно, да ли ће се извесна количина рада урадити за дуже или краће време. У техничком погледу, једна је сила у толико кориснија у колико је краће време за које она изврши неки известан рад, те се за то рад неке силе цени према оном раду, који она изврши за једну секунду и тај се рад зове *ефект*. Па како се код једнаког кретања, пут који сила пређе за јединицу времена зове брзина, то је онда ефект неке силе раван производу из силе и брзине т. ј. ефект

$$E = P c \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (126$$

или пошто је $c = \frac{s}{t}$

$$E = P \cdot \frac{s}{t} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (126'$$

Кад је P дато у килограмима, а c у метрима, онда је Pc број секундних метаркилограма. Целокупан пак рад извршен у неком времену t добијамо, кад ефект помножимо са временом:

$$R = E t = P c t = P s \quad \cdots\cdots \quad (127$$

Да не би у практици, где се обично има посла са великим радним величинама, рад био изражен сувише великим цифрама, уведена је једна већа јединица за ефект и то снага једног *парног коња*, која износи 75 метаркилогр. у секунди, јер се узима да добар коњ, кад дневно ради 8 сати, може да изврши сваке секунде 75 метаркилогр. рада. У Енглеској рачуна се коњска снага (horse power) 500 стопних фуната за секунду. Просечан рад пак, који заиста може жив коњ да изврши, neће се на

50 метар. килогр. а кад нека машина ради и дању и ноћу, онда једна машинска коњска снага уради толико, колико $3 \frac{1}{2}$ жива коња.

246. Сва она тела или справе, која могу рад да производе зову се *мотори*. Међу најважније моторе у природи долази човек и животиње (који се зову још и *живи мотори)* за тим тежине које падају, текуће водене масе, ваздушне струје, затегнуте опруге, паре и гасови под високим напоном и т. д.

Врло се ретко рад природних мотора употреби онако како се у природи нађе, него се обично он прилагођава за оне прилике за које је нама потребан. Оруђе или справе, којима ми рад прилагођујемо за наше потребе, било да му брзину повећамо или смањимо на рачун интензитета и обратно, било да му мењамо правац, и т. д. зову се *машине*. Али увек приликом прилагођивања рада у машинама, један известан део његов троши се на савлађивање разних отпора у машинама; и она је машина боља, која мање троши рада на саму себе и која већи део од примљеног рада изда. С тога се код машина говори о *корисном ефекту* $E_к$, а то је ефект који машина изда по утрошеном *споредном ефекту* $E_с$ на савлађивање отпора у појединим својим деловима. *Корисни* и *споредни ефект* једне машине заједно, равни су *укупном* или *тоталном ефекту* $E_т$ мотора.

$$E_т = E_к + E_с.$$

Нема ни једног мотора ни машине код које би споредни ефект био раван нули, и за то је увек корисни ефект мањи од тоталнога.

Однос између корисног и тоталног ефекта зове се корисност машине

$$K = \frac{E_к}{E_т},$$

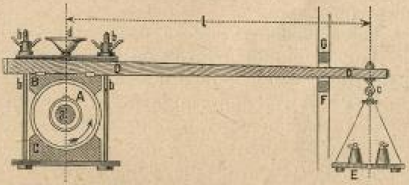
и тај је однос, изражен процентима, увек мањи од јединице.

Из овога се става увиђа немогућност „perpetum mobile".

247. Практички се одређује ефект машина кочним или бремзним динамометром од Prony-а који је представљен на сл. 89 Све машине обично окрећу једну главну

осовину, са које се кретање даље преноси. И динамометар се завртњима bb утврди за ту осовину мотора A, која се у окретању таре о јастуке B и C динамометра.

Са једним од тих јастука утврђена је полуга DD, која на крају носи један тас у који се могу метати тегови E. Завртњима се оса мотора толико укочи, да се окреће онолико пута у секунди, за који се број обрта тражи ефект машине. Осовина би са собом окретала и полугу DD да нема заустављача G и F, с тога је оса принуђена да се таре о јастуке динамометра и да својим радом то трење савлађује. Цео се задатак своди да се одреди величина тога трења, што се постиже удешавањем терета у тасу да полуга DD не удари о заустављаче G и F него да остане у равнотежи између њих као што показује слика. За све време експеримента кроз јастуке тече вода, да се не би од трења упалили.



Сл. 89.

Означимо са P снагу, коју има оса машине у трењу о јастуке да савлада, r полупречник осе; Q нека је терет у тасу а l дужина полуге. Из теорије полуге зна се, да за равнотежу између терета и тога трења постоји ова једначина

$$Q \cdot l = P \cdot r$$

одакле

$$P = \frac{Q\, l}{r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (128$$

Пошто је све с десне стране познато, P се може одредити.

Ако је c периферна брзина ма које тачке на периферији моторове осе, која се лако може одредити из броја обртања осе у минути

$$\left(c = \frac{2\pi n r}{60}\right)$$

онда је ефект самога мотора, измерен на његовој оси:

$$E = P \cdot c.$$

F. О живим моторима.

248. Радна способност живих мотора, људи и животиња зависи:

1. Од природе самих индивидуа које раде, дакле од климе, расе, пола, старости, ране и извежбаности, даље код човека од воље а код животиња од срчаности.

2. Од врсте самога посла, дакле од положаја тела, од мишића, који су у раду напрегнути, од облика и величине кретања њиховог, као и од величине снаге, коју треба употребити.

3. Од свакодневног трајања рада.

Живи се мотори нарочито разликују од мртвих што се за време рада уморе, па им је потребно дуже или краће време да своју снагу прикупе. С тога је *трајање рада* нарочито важан фактор при оцени радне способности код људи и животиња, а одређује се бројем сати за које је мишићна снага заиста напрегнута била. Па како је сваки рад животињски више или мање испрекидан одморима, то треба поред секундног рада т. ј. ефекта навести број сати дневнога рада.

Осим тога код живих мотора игра велику улогу *брзина* самога њиховога тела за време рада. Јер ако је брзина њиховог кретања врло мала, онда се може рад утрошен на кретање тела занемарити према раду, који иначе врше; међу тим ако у раду, морају да трче, онда се врло велики део снаге њихове утроши на кретање тела, и мало што остаје за други рад.

Посматрањем се нашло да једна извесна индивидуа највећи ефект постигне радећи неки извесан посао, кад ради неко извесно средње или нормално време дневно, са неком сасвим одређеном средњом или нормалном брзином, и кад на тај рад троши одговарајућу средњу или нормалну снагу. Кад вуче лађу, човек највише уради кад ради дневно 8 сати, кад вуче снагом од 10 кгр. и са брзином од 0·8 мет.

Више се пута од тога правила одступа на рачун једне од тих величина, (дневног времена, брзине и снаге) према томе каква је кад природа посла. При сваком пак том одступању, апсолутни се максимум дневног рада никад не може постићи, али је више пута довољно да се само релативни максимум постигне, и због њега се повећа или брзина на рачун снаге и дневног трајања или обратно. И да се у том случају кад се и од средњих вредности одступа, нађе снага са којом један радник располаже, служимо се Герстнеровим обрасцем, који се доста добро слаже са практиком.

Снага P' коју један човек или животиња, радећи t' сати дневно са брзином v' може да постигне дата је овим обрасцем:

$$P' = P\left(2 - \frac{v'}{v}\right)\left(2 - \frac{t'}{t}\right) \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (129$$

где P значи средњу снагу, v средњу брзину, а t средње дневно време. За средњи дневни рад од 8 сати

код човека је $\cdot \cdot \cdot P = 14$ кгр. $v = 0{\cdot}79$

код коња » $\cdot \cdot \cdot P = 56$ кгр. $v = 1{\cdot}264$

код вола » $\cdot \cdot \cdot P = 56$ кгр. $v = 0{\cdot}79$

Тако би један човек са брзином од 0·948 m. радећи дневно само 5 сати радио снагом од

$$P' = 14\left(2 - \frac{0{\cdot}948}{0{\cdot}79}\right)\left(2 - \frac{5}{8}\right) = 15{\cdot}4 \text{ кгр.}$$

Многобројним опажањем су радне способности људи и животиња у разним њиховим пословима сведене у таблице. Међу тим све наведене вредности ваља сматрати само као приближне, пошто у сваком специјалном случају оне могу више или мање одступати. Мало ниже излажемо таблицу рада, коју могу живи мотори да изврше у разним пословима при којој ваља ово имати на уму:

При преношењу терета по хоризонталном путу, не треба тежину терета множити с путом да се добије извршен рад; јер овде терет не дејствује правцем пута него управно на тај правац и цео се рад своди на савлађивање трења, а то трење може и на хоризонталном путу бити разно према разлици самих путова.

Таблица средњих или нормалних вредности за снагу, брзину и дневни рад као и апсолутне радне способности живих мотора у разним пословима.

Мотор	Врста рада	Нормална снага у килограмима	Нормална брзина у метрима	Нормално дневно време рада: у сатима	Нормално дневно време рада: у секундама	Апсолутни максимум радне способ.: за секунд: у секунд. мет. килогр.	Апсолутни максимум радне способ.: за секунд: у коњским снагама	Апсолутни максимум радне способ.: на радни дан у метар килограмима	Примедбе
Човек од 70 кгр. теж.	Иде по приближно хоризонт. путу	6	1·5	10	36000	9·0	0·120	324000	По Вајсбаху износи отпор, који човек савлађује у ходу $\frac{1}{12}$ део његове сопст. тежине и $\frac{1}{12}$ терета који носи.
	Носи по хориз. путу терет од 18 килогр. 1. Кад се урачуна и тежина тела	7·5	1	8	28800	7·5	0·100	216000	
	2. Кад се рачуна само корисни терет	1·5	1	8	28800	1·5	0·020	43200	
»	Гура или вуче кола, лађу и т. д. по хоризонталном путу	10	0·8	8	28800	8	0·107	230400	
»	Пење се уз степене са теретом од 50 к.	120	0·04	8	28800	4·8	0·065	138240	
	Само се терет рачуна	50	0·04	8	28800	2·0	0·027	57600	
»	Пењање уз брдо са теретом од 12 килогр.	82	0·11	10	36000	9·0	0·120	324000	Рад алпијских вођа
	Само терет рачунат	12	0·11	10	36000	1·3	0·017	46300	
»	Подиже терете рукама	20	0·17	6	21600	3·4	0·047	73440	
»	Подиже земљу лопатом на висину од 1·6 m.	2·7	0·40	10	36000	1·08	0·014	38880	
»	Подиже терет вукући вертикално уже пребачено преко котура.	18	0·2	6	21600	3·6	0·048	77760	Због честог мењања руку брзина је мала.
»	Ради сам окрећући ручицом точак од 0·4 до 0·45^m у полупречн.	8	0·8	8	28800	6·4	0·085	184320	За обртне радове на машин. може се узети норм. снага од 16 кгр.
	Ради са још једним на две ручице удаљене за 135^0 једна од друге	12·5	0·7	8	28800	8·75	0·117	252000	Ово вреди за сваког радника посебице.
»	На ручном шмрку: са обема рукама	16	1·7	—	—	27·2	0·360	—	Трајање рада 5—10 минута после врло дугог одмора.
	са једном руком	10	1·7	—	—	17	0·226	—	
»	На пожарном шмрку: По Вајсбаху	10·53	1·57	—	—	16·5	0·220	—	Трајање рада само две минуте са дугим одморима.
	По Рилману	8·77	1·94	—	—	17·0	0·226	—	
	По Хартигу	12·8	1·77	—	—	22·6	0·300	—	
Жена врши обично $^2/_3$ човечијег рада.									
Коњ	Вукући кола	60	1	8	28800	60	0·800	1728000	Кад се упрегну два коња опадне радна способност на 0·95; код четири коња на 0·8, код 12 коња на 0·5 оне вред. кад је 1 коњ.
	На долапу	45	0·9	8	28800	40·5	0·540	1166400	
Во	вукући кола	60	0·8	8	28800	48	0·640	1382400	
	на долапу	65	0·6	8	28800	39	0·520	1123200	
Магарац	вукући кола	40	0·8	8	28800	32	0·427	921600	
	на долапу	14	0·8	8	28800	11·2	0·149	322560	

249. *Примери.* — 1. Докле се може човечијим радом од 250 мет. кил. одвући једне саонице кад се има при том да савлада трење од 25 кгр.?

$$s = \frac{R}{P} \cdot = \frac{250}{25} = 10^m. —$$

2). Колики рад врши по датој таблици један човек од 70 кгр. тежине, који један терет од 20 кгр. однесе по хоризонталном путу једну миљу далеко (7420 мет.)?

$$R = 7420 \cdot \frac{70+20}{12} = 55650 \cdot \text{мкгр.} \quad —$$

3). Жељезнички воз савлађује просечно отпор од $\frac{1}{200}$ своје тежине. Колики је рад потребан да се један воз, једну миљу далеко одвезе кад се притом попне за 100^m? — Тежина воза нека је 150 тона по 1000 кгр. Рад за савлађ,о тпора на путу од једне миље = 7420 мет. износи

$$7420 \cdot \frac{150 \cdot 1000}{200} \text{ меткгр.}$$

Кад се све то има да попне на висину од 100 мет., ваља утрошити рада $100 \cdot 150 \cdot 1000$ мкгр. свега дакле $= 20565000$ мкгр. $= 274200$ коњских снага. —

4). a, кад се чекићем од 400 кгр. тежине, који пада са висине од 3 метра укуца један дирек после 20 удараца 9^{cm} дубоко у земљу, колики се терет сме метути на тај дирек па да даље не пропада? b). Због сигурности узети само $\frac{1}{10}$ део те вредности.— На основу принципа да је акција равна реакцији, рад силе раван је раду отпора те према томе постоји образац $P\,S = Q\,s$ одакле тражимо

$$Q = \frac{P\,S}{s} \cdot = \frac{400 \cdot 3 \cdot 2000}{9} = 266666\,{}^2/_3 \text{ кгр.} \quad \text{b. } 26666\,{}^2/_3 \text{ кгр.}$$

5). Колики је a, укупни, b, секундни рад једног свирача на гласовиру, који одсвира увертиру за оперу „Don Juan" за 6 минута, кад у њој има 5420 нота, кад за покретање сваке дирке треба снага од 65 грама и кад се свака дирка спусти 1^{cm}? — Цео рад износи $5420 \cdot 65 \cdot 1 = 352300$ грамсантиметара; b, следствено секундни рад т. ј. ефект $E = \frac{352300}{6 \cdot 60} = 978{\cdot}6$ гр. см.

6). a, Колики рад врши пара, кад са притиском од 3 атмосфере, покрене један клип од 60^{cm} у пречнику 2000 пута тамо и амо у цилиндру од 1 метра дужине.

b, како се да представити рад паре при једном покрету клипа у виду површине, кад притисак паре опада подједнако од 3 атмос. на 0.

c, колики је у том случају рад:

α. за један покрет

β. за 2000 покрета?

a, пошто притисак једне атмосфере на квадратни сантиметар износи 1033·448 грама, то кад је притисак три атмосфере он ће бити од прилике 3·1 кгр. на 1 $\square^{cm}$. Површина клипа

$$r^2 \pi = 30^2 \cdot 3{\cdot}14159 = 2827{\cdot}431 \square^{cm}.$$

према томе ће цео притисак на клип изнети

$$P = 8765{\cdot}036 \text{ кгр.}$$

Клип се 2000 пута тамо и амо крене по путу од 1^m дакле цео пут изнеће

$$s = 2 \times 2000 = 4000 \text{ м.}$$

Па дакле и цео рад

$$R = P \cdot s = 35060144 \text{ мкгр.}$$

b). Графички се да представити извршени рад према постављеном питању једним правоуглим троуглом, кога би основица била пут од 1^m, а висина притисак од 3 атмосфере т. ј.

$$= 8765{\cdot}036 \text{ кгр.}$$

c). Према томе рад клипа при једном свом кретању = површином тога троугла

$$R' = 8765{\cdot}036 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 4382{\cdot}518.$$

Рад пак свију 2000 кретања износи

$$R'' = 4382{\cdot}518 \times 4000 = 17530072 \text{ мет. кил.}$$

7). Колики је ефект једног тестераша, кад он гура тестеру снагом од 8 кгр., кад 75 пута повуче тестеру и кад сваким вучењем тестера пређе дужину од 35 ^{cm}? — По обрасцу $E = Pc$; овде је $c = \frac{75 \cdot 35}{60} = 0{\cdot}4375^m$. Па дакле $E = 3{\cdot}5$. Ако узмемо да и при повлачењу тестере остане исти притисак од 8 кгр. онда је $E = 2 \times 3{\cdot}5 = 7$ мет. кгр.

8). Пред седанску су битку немачки војници носећи товар од 35 кгр. дневно за 6 сати прелазили 4 миље (по 7420 мет.) и при томе се просечно на 10 брежуљака од по 300 мет. испели. Колики је био њихов ефект, кад се узме, да је сваки војник тежак био 65 кгр.? — Пошто човек у ходу има да савлада $\frac{1}{12}$ своје тежине и $\frac{1}{12}$ терета који носи, то је цео отпор једног војника износио $\frac{1}{12}(65 + 35) = \frac{25}{3}$ кгр.

Тај отпор ваља савладати на путу од 4×7420 мет. дакле рад извршен за 6 сати дневног хода износи

$$R_1 = \frac{25}{3} \times 4 \times 7420 = 247333 \text{ мет. кгр.}$$

За тим се требало испети на 10 брежуљака од по 300 мет. т. ј. ваљало је издићи своју тежину и терет (свега 100 кгр.) на 3000 мет. висине те тај рад износи

$$R_2 = 300000 \text{ мет. кгр.}$$

Пошто у 6 сати има 21600 секунада то је најзад ефект био:

$$E = \frac{247333 + 300000}{21600} = 25\frac{1}{3} \text{ мет. кгр.}$$

$$= \frac{25\frac{1}{3}}{75} = \frac{1}{3} \text{ коњске снаге.}$$

9). Кад ваља један чекић од 500 кгр. испети 20 пута у минути на висину од 2 метра, а препоне износе $\frac{1}{5}$ терета, колико треба употребити људи за тај посао, кад радници могу радити непрекидно само једну минуту, па се онда дуже одмарати и кад према томе њихов ефект не може прећи 20 мет. кгр.?

Отпори износе $\frac{1}{5}$ $500 = 100$ кгр. па дакле ваља свега издићи 600 кгр. на висину $20 \times 2^m = 40$ мет. за минут дакле ефект је $E = \frac{600 \cdot 40}{60} = 400$ мет. кгр. Узмимо да треба n радника онда мора да буде

$$20\,n = 400, \qquad \text{дакле } n = 20 \text{ радника.}$$

10). Колики је апсолутни ефект једне парне машине, кад она под притиском од 4 атмосф. крене клип од 40^{cm} у пречнику 1·5 метар далеко? — Четири атмосфере притиска износе $4 \times 1033{\cdot}448$ = од прилике 4.134 кгр. на сантиметар. Површина клипа је

$$r^2\pi = 20^2 \cdot 3{\cdot}14 = 1256 \text{ кв. см.}$$

дакле цео притисак

$$1256 \times 4{\cdot}134 = 5192{\cdot}3 \text{ кгр.}$$

Према томе је ефект

$$E = 5192{\cdot}3 \times 1{\cdot}5 = 7788{\cdot}5 \text{ мет. кгр.}$$

или

$$E = \frac{7788{\cdot}5}{75} = 104 \text{ парних коња.}$$

10). Приликом једног опита са динамометром Прони-јевим, за одредбу снаге једне турбине, износила је даљина обешених тегова од осе турбине $1{\cdot}92^m$, цео терет био је $= 21$ кгр. а број обрта 120 на минут. Колики је дакле ефект турбине? Из једначина за динамометар имамо

$$E = \frac{Q\,l\,n\,\pi}{30} = \frac{21 \times 1{\cdot}92 \times 3{\cdot}14 \times 120}{30}$$

$= 506{\cdot}4$ мет. кгр.

$= 6{\cdot}73$ парних коња.

III. ЕНЕРГИЈА

А. О енергији у опште.

250. Најпростији облик обрасца за рад био је

$$R = Ps$$

Ако у место пута s, са којим треба помножити силу па добити рад, унесемо у тај образац брзину и убрзање, и то служећи се напред нађеним обрасцем:

$$s = \frac{v^2}{2a}$$

а тако исто ако у место силе узмемо количину убрзања ma, онда ће израз за рад бити

$$R = Ps = P\frac{v^2}{2a} \cdot = \frac{a\,m\,v^2}{2a} = \frac{m\,v^2}{2} \quad . \; . \; (130$$

Или још

$$R = Ps = \frac{Q\,v^2}{2g} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (130'$$

Тај новодобијени израз с десне стране једначине, $\frac{m\,v^2}{2}$, који је по апсолутној вредности својој раван раду, и који није ништа друго до други облик рада, зове се *енергија*. (Пређе се тај израз звао *жива сила**). И као што се из самога обрасца види:

* Израз „жива сила“ увео је први у науку Лајбниц 1695 год. за величину Mv^2; Coriolis је тим именом назвао израз $\frac{Mv^2}{2}$. По Belanger-у био би израз Mv^2 жива сила, а $\frac{1}{2}$ Mv^2 жива моћ. У новије време су енглески физичари унели реч енергија за $\frac{mv^2}{2}$ и она је свуда данас усвојена.

енергија једне покренуте масе равна је половини производа из масе и квадрата брзине.

Једна сила P, као што смо видели, у стању је да врши неки извесан рад, кад савлађује отпор на неком извесном путу s, и тај је рад представљен левом страном једначине. Међу тим дејство једне силе може бити и такво, да она једну слободну и мирну масу покрене, или што је све једно, да она једној већ покретној маси измени брзину те дакле да поред савлађивања отпора, саопшти покренутом телу још и неку самосталну брзину. И кад тако једна сила покрене једну масу, онда је та маса у стању да сама собом, својим добијеним кретањем креће друге масе, да притискује или да вуче. Према томе у тој покренутој маси има нечега, чега нема у мирном отпору или притиску, у њој има кретања спојеног са притиском а не само притиска; та покренута маса има могућности да сама даље ради, да као каква сила друга кретања изазива и за то се та сила за разлику од мирних притисака називала пређе *жива сила* а данас се назива *енергија*, која реч и у обичном живому значи „способност за рад". Према томе, *енергија једне покренуте масе је радна способност, коју та маса стече својим кретањем.*

Енергије има сваки у висину подигнути терет, јер са те висине падајући може вршити рад. За то се дуварски сахатови навијају подизањем њиховог тега; у истом је стању и један водопад. Енергије има и напрегнута опруга, на пр. код навијеног џепног сахата, као и напрегнута мишица. Енергије налазимо и код сабијенога гаса, код затворене паре; она је нагомилана у експлозивним смесама, на пример у баруту, динамиту, праскајућем гасу.

Енергија излази на видик код сваке покретне масе, (код воде која отиче, код ветра, код избачене гранате, код замахнутог чекића, код заоштијаног замајца). Енергија се налази нагомилана у мишићима човека и животиња, јер иначе не би имали никакву снагу нити би могли вршити рад.

Сва ова поједина тела, која смо само као пример за све остале навели, губе од своје енергије чим почну да раде. Њихова се енергија у толико више смањује у колико више раде. Тако на пр. тег код дуварног сахата поступно силази крећући точкове његове; затегнути лук олабави кад избаци стрелу; пара изгуби свој напон, кад одгурне клип у цилиндру; хемијска се енергија у баруту изгуби кад избаци тане; вода изгуби сав свој пад или брзину кад покрене воденични точак; избачена граната изгуби сву своју енергију кад се зарије у какво тело; замајац се заустави вршећи рад и кад му се нова енергија не додаје; па и сам мишићни апарат код човека и животиња ослаби и умори се, ако му се у рани и у удисаном кисеонику истрошена енергија не накнади.

Свакоме је познато, каква дејства може да произведе једна покренута маса: један камен може да разбије тело на које се баци (рецимо прозор); једно из пушке избачено тане може да пробуши даску или зид: један се железнички воз може далеко сам собом кретати и кад се пара заустави; ветар није ништа друго, до покренут ваздух. И свака та покренута маса, има у себи способности да врши рад и она ће га вршити уклањајући с пута све оно на шта наиђе. Пушчана или још боље топовка кугла разрушиће цео један зид, железнички ће воз савладати све отпоре на које наиђе у свом путу; сви знамо, какве су жалосне последице од судара таквог воза; бура чупа и најдебља стабла; бујица односи и руши све нашта наиђе у свом путу. Енергија једне покренуте масе је дакле притисак, гурање или вучење сваке препоне или отпора, на који наиђе у путу свом; *енергија* је сада *интензиван рад*. Код судареног воза, код олује, код бујице, код топовског зрна, енергија је оно, што ломи, руши, чупа, обара, разбија и мрви. —

251. Кад се промени брзина једног покренутог тела, онда се са променом брзине промени и његова енергија. Ако је у почетку неког извесног времена брзина тела била $= v_0$ онда је његова енергија $E_0 = \frac{1}{2} Mv_0^2$; ако је на крају тог времена брзина постала v, и енергија му је сад $E = \frac{1}{2} Mv^2$. Узмимо да је v веће од v_0 онда је енегија порасла у телу за величину

$$\frac{1}{2} Mv^2 - \frac{1}{2} Mv_0^2$$

и та се величина може сматрати као рад, који је био потребан, да промени маси M брзину од v_0 на v; она се може још сматрати и као енергија нагомилана у том међувремену. Сакако пак може се написати ова једначина

$$R = Ps = \frac{1}{2} M (v^2 - v_0^2) = E - E_0 \cdot \cdot \quad (131$$

Ако масу заменимо тежином Q имаћемо

$$R = Ps = Q \left(\frac{v^2}{2g} - \frac{v_0^2}{2g} \right)$$

Међу тим је $\frac{v^2}{2g} = s$ а тај се пут код слободног падања зове висина са које тело пада: h. Кад дакле у место $\frac{v^2}{2g}$ ставимо h а у место $\frac{v_0^2}{2g}$ ставимо h_0 имаћемо још и овај образац

$$R = Ps = Q (h - h_0) \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (131'$$

Ако је крајња брзина мања од почетне, дакле $h_0 > h$ онда би рад, потребан да маси M смањи брзину од v_0 на v, т. ј. за $v_0 - v$ био

$$R = Ps = \frac{1}{2} M (v_0^2 - v) = Q (h_0 - h) \cdot \cdot \quad (132$$

252. До сада смо увек замишљали да имамо посла само са једним телом, и њему смо одредили енергију. Посматрајмо сад општи случај, где нам је дат цео један систем тела или боље рећи цео један систем маса, који је изложен дејству ма каквих сила. Био пак тај систем ма какав и ма како биле различите силе, којима су поједини његови делови изложени, ми ћемо га увек моћи разложити на поједине делове, за које ће брзине бити дате; сваки тај део има своју енергију која се одређује онако исто као и за једну самосталну масу. Означимо дакле са $v_{01}\, v_{02}\, v_{03} \cdot \cdot \cdot v_{0n}$ почетне а са $v_1\, v_2\, v_3 \cdot \cdot \cdot v_n$ крајње брзине сваког тог појединог дела, онда ћемо стечену енергију сваког тог појединог дела масе $m_1\, m_2\, m_3 \cdot \cdot \cdot m_n$ одредити као и мало час:

$$R_1 = P_1 s_1 = \frac{1}{2} (m_1 v_1^2 - m_1 v_{01}^2)$$

$$R_2 = P_2 s_2 = \frac{1}{2}(m_2 v_2^2 - m_2 v_{02}^2)$$

$$R_3 = P_3 s_3 = \frac{1}{2}(m_3 v_3^2 - m_3 v_{03}^2)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$R_n = P_n s_n = \frac{1}{2}(m_n v_n^2 - m_n v_{0n}^2)$$

Енергија целог система биће равна збиру енергија појединих делова система. С тога кад све те поједине енергије саберемо, добићемо целокупну енергију система:

$$R_1 + R_2 + R_3 + \cdots R_n =$$

$$= \frac{1}{2}\left[m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 + m_3 v_3^2 + \cdots m_n v_n^2\right] -$$

$$-\frac{1}{2}\left[m_1 v_{01}^2 + m_2 v_{02}^2 + m_3 v_{03}^2 + \cdots m_n v_{0n}^2\right]$$

$$\Sigma(R) = \frac{1}{2}\Sigma(mv^2) - \frac{1}{2}\Sigma(m v_0^2)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\Sigma(mv^2) - \Sigma(mv_0^2).\right]$$

$$R = E - E_0 \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (133$$

Из овог обрасца, који је сасвим сличан са обрасцем 131 читамо:

Рад, који нека маса (или неки систем маса) било у себе прими кад из мање брзине пређе у већу или изврши, кад из веће пређе у мању, увек је раван разлици енергија те масе (или система маса) а за посматране брзине.

Кад је збир радова сила положан, онда је $v > v_0$, онда енергија система расте. Ако је збир радова сила одречан, она је $v < v_0$; енергија система опада. Ако је најзад збир тих радова сила раван нули, $v = v_0$; енергија система се не мења.

Из тог веома важног општег закона о енергији потичу ова два специјална закона:

253. **Први закон о енергији:** *Енергија једне покренуте масе*) равна је раду оне силе, која је масу покренула.*

* Да не би често понављали, напоменућемо, да све што будемо извели за једну масу вреди и за систем маса.

Једна сила, која у некој маси тежи да изазове енергију не може то учинити ако је у миру. Чим сила масу крене, онда она врши неки рад, који знамо да је раван производу из силе и њеног пута. Сила пак, која ће маси m саопштити убрзање a или брзину v за време t биће као што знамо

$$P = \frac{mv}{t}.$$

Пошто је њен пут

$$s = \frac{at^2}{2}$$

то је и њен рад:

$$R = Ps = \frac{mvat^2}{2t} = \frac{mv^2}{2}$$

Дакле рад R силе P, која је маси m саопштила брзину v, раван је енергији те масе.

Примера ради узмимо енергију једног топовског зрна. Сила која је зрно ставила у кретање јесте високи напон прегрејаних барутних гасова. Нека је средња величина тога напона за све време док је дејствовао на зрно представљен силом P. То пак дејство трајало је само док се зрно кретало кроз топовску цев, дакле на путу s; према томе утрошени рад барутних гасова на кретање зрна износи Ps. Зрно излази из топа брзином v, његова је маса $m \left(= \frac{Q}{g}\right)$, према томе оно има у себи енергије $\frac{mv^2}{2}$. Цео се дакле рад барутних гасова налази нагомилан у енергији зрна.

Посматрањем израза за енергију видимо, од чега зависи његова величина. Кад једна три пут већа маса падне на земљу са неке извесне висине, њено ће дејство или енергија бити три пут већа, па дакле и рад три пут већи. На против, ако ту масу пустимо са такве висине, да она падне са брзином три пут већом, онда је њено дејство, њена енергија, њен рад девет пута већи за то што из обрасца за $v = \sqrt{2gs}$, пут мора бити девет пута већи да брзина буде само три пут већа.

Кад нека сила покрене неку потпуно слободну масу, и кад знамо, да је енергија те масе равна раду силе која ју је покренула, онда може ова енергија потпуно заменити онај рад; она се само у толико разликује од рада, што енергија може дејствовати од један пут, што може у једном тренутку извршити оно, што је рад на дужем путу за дуже време извршио. С тога се енергија зове и *нагомилан* или *интензиван рад*. Ако гурамо једна лако покретљива кола по равном путу, онда се онај део нашега рада, који преостане од савлађивања отпора трења и ваздуха налази у облику енергије у самим колима, услед кога могу сад та кола, остављена самима себи, покренути друга нека кола ако на њих наиђу у путу. Рад водене паре код жељезничког воза, који се не утроши на савлађивање отпора него на повећање брзине воза, скупља се мало по мало у возу као његова енергија, која после може и кад пара престане, други један воз да уништи ако на њ' наиђе или да самог себе читав један километар даље креће савлађујући све отпоре на које у путу наиђе. Кад један мотор, на пример водопад, може својим кретањем неко извесно дејство да постигне, ми можемо то дејство да одредимо или из његовог рада, или из његове енергије. Ако на пример пада нека водена маса од 80 кгр. са висине од 100 мет. онда је наравно рад њен = 8000 метаркилогр. Исти ћемо рад наћи и кад њену енергију потражимо; јер је m у овом случају $= \frac{80}{10} = 8$ а брзина v^2 по обрасцу $v = \sqrt{2gs}$, биће $= 2 \cdot 10 \cdot 100 = 2000$ што помножено са *8* и подељено са два даје опет 8000 мет. кгр.

254. Други закон о енергији. — *Енергија неке покретне масе равна је раду, који та маса може да изврши, кад сву своју брзину изгуби.*

На више смо места већ видели, да једна покренута маса може да врши рад. Она га врши тиме, што може неку извесну препону или отпор P да савлада, и да га на неку даљину *s* помакне. Рад, који је та покренута маса извршила = Ps. Али савлађујући тај отпор, она губи од своје брзине, све док је не изгуби сасвим.

И ако имамо на неком примеру да маса m, савлађујући неки отпор P, губи сваке секунде неку извесну количину своје брзине, ми ћемо моћи лако одредити цео њен губитак приликом савлађивања отпора P. Такав пример налазимо код тела које бацимо вертикално у вис неком извесном брзином v и које дакле полази у висину са енергијом $\frac{mv^2}{2}$ ако му је маса m. Ма да то тело пењући се у висину нема никакве препоне да савлађује (занемарићемо овде отпор ваздуха), ипак његова брзина сваке секунде опада за $g = 9{\cdot}81$ (у округлој цифри $= 10^m$) услед привлачне снаге земљине. И кад једна маса m услед неке силе Q губи сваке секунде g од своје брзине, то она губи услед силе P убрзање

$$a = \frac{P}{m} = \frac{g}{Q} \cdot P \cdot$$

а за t секунада изгубиће брзину

$$v = at = \frac{g}{Q} \cdot P \cdot t \cdot$$

Ако је t оно време, за које ће покретна маса сву брзину да изгуби, онда је

$$v - \frac{g}{Q} \cdot P \cdot t = 0.$$

одакле опет

$$P = \frac{Qv}{gt}.$$

Ово P значи притисак или отпор т. ј. привлачну снагу земљину, коју у вис бачен камен савлађује. Пошто знамо, да ће пут таког у вис баченог тела бити $s = \frac{v^2}{2g}$ то ће онда очевидно рад његов на целом путу док се не заустави бити:

$$Ps = \frac{Qv}{gt} \cdot \frac{v^2}{2g} = \frac{Q}{g} \cdot \frac{v}{gt} \cdot \frac{v^2}{2} = \frac{mv_2}{2}.$$

Мало час смо видели, да ће зрно, кад излеће из топовских уста, имати у себи енергије $\frac{mv^2}{2}$. Занемаримо све споредне отпоре на пример тежу и отпор ваздуха, па предпоставимо, да зрно са свом том енергијом удара о неки бедем, који му ставља неки извесан отпор P'. Зрно савлада тај отпор и улази у бедем док сву брзину борећи се против трења не изгуби; оно се зауставило на дубини s'. И отпор који је зрно савладало у бедему, одређен је обрасцем

$$P's' = \frac{mv^2}{2}.$$

Дакле као што видимо, енергија се претворила у обичан рад $P's'$. Тај је рад узрок рушењу и штети, коју једно топовско зрно произведе. Према томе је енергија $\frac{mv^2}{2}$ мера за моћ *рушења* коју је топовско зрно понело са собом чим је из топовских уста изашло.

На томе се закону оснива дејство извесних, иначе малих и лаких тела кад се крећу великом брзином. Једно тело од 30 кгр. тежине и 4 мет. брзине има у себи енергије од $\frac{1}{2} 3 \cdot 4^2 = 24$ мет. кил. дакле може да изврши рад од 24 мет. кил. и може на пример 24 кил. тежине попети на један метар и обратно, или 12 кгр на 2 мет. и т. д. али може и 240 кгр на један десиметар, као и 24000 кгр на 1 mm. Исто тако једно пушчано зрно од 20 грама, може услед своје тежине на пример кроз воду пропасти, али остаје без икаква дејства кад га на сто положимо или у руци држимо. Бацимо ли га из пушчане цеви са брзином од 500 мет., оно носи са собом енергију од 250 мет. кил. те дакле може сад један отпор од 5000 килогр. да помакне за 5 сантиметара, може да продре у дрво, у камен, у кости. Само се овим особинама енергије може схватити задатак пуцања, бацања, ударања и т. д. У свима тим случајима, ми, ма на који начин нагомиламо у неком телу рада у облику енергије, па тај рад врло брзо трошимо у отпорима и препонама, које хоћемо да савладамо.

Каква је пак велика разлика између једне покренуте и мирне масе види се најбоље на овом свакидашњем примеру. Да нађемо, коликим би мирним притиском требало дејствовати на главу једнога јексера па да га укуцамо онолико, колико једним чекићем тешким 1 кгр.? Рецимо да смо једним ударцем чекића закуцали јексер за један милиметар; обично замахнут чекић пада на јексер брзином од 10 мет. Према томе енергија чекића је $=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10}\cdot 10^2 = 5$ мет. кгр.; рад чекића кад заједно са јексером падне један mm биће $= 1 \times 0\cdot001 = 0\cdot001$ mk. те дакле и цео рад чекића $= 5\cdot001$ mk Означимо са x непознати миран притисак, који би исто толико укуцао јексер, онда мора његов рад $x \cdot 0\cdot001$ бити раван раду чекића т.ј. мора постојати ова једначина: $x \cdot 0\cdot001 = 5\cdot001$ одакле је $x = 5001$ кгр. Дакле замахнути чекић од 1 килогр. произведе сасвим исто дејство колико 5001 килогр. мирног притиска.

Прикупљање или гомилање рада у облику енергије нашло је примену код точкова замајаца свију парних и других сличних мотора и машина. Пара не може непрекидно дејствовати на клип у парном цилиндру, па и кад дејствује, њено дејство није за све време једнаке јачине; осим тога ни сви делови машине немају увек један исти отпор. Све би то учинило, да кретање ни једне парне машине не би било једнако, нити би оне могле наћи оволике примене да тој неједнакости у дејству водене паре није поможено замајцима. За то је за главну осовину сваког таквог мотора утврђен један што је могуће већи и тежи точак, кога се главна маса налази по периферији, јер на том месту може заузети највећу брзину. У тој маси (растењем брзине) скупља се за време јачег дејства паре и слабих отпора рад паре, који у виду енергије кад пара престане да ради и кад отпори порасту, савлађује те отпоре те тако бива рад машине једноставан и приближно непромењљив.

Нарочито је важан у техници тај други закон о енергији, јер се помоћу њега могу решити сва практична питања, која би се тицала каквог мотора. Из обрасца $\frac{1}{2}\,m\,v^2 = Ps$ може се ма која од четири вредности наћи кад су остале три познате. Решењем једначине по P

$$P = \frac{mv^2}{2s}$$

може се одредити отпор, који мотор на путу s савлађује и може да савлада, односно отпор, који је у стању цео мотор да заустави. Решењем једначине по s,

$$s = \frac{mv^2}{2P}$$

или по v

$$v = \sqrt{\frac{2\,Ps}{m}}$$

налазимо пут, на коме енергија, дати отпор P савлађује или брзину, коју мотор мора да има па да тај отпор савлада.

Ако за тај циљ употребимо општију једначину

$$Ps = m\frac{1}{2}(v^2 - v_0^2)$$

имаћемо

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2g\frac{Ps}{Q}} \quad \ldots\ldots\ldots (134$$

или исто тако

$$m = \frac{2\,Ps}{v^2 - v_0^2}$$

$$= \frac{2\,Ps}{(v + v_0)(v - v_0)} \quad \ldots\ldots\ldots (135$$

Код свију наизменично убрзаних и успорених кретања, дакле код свију тако званих периодичких или хармоничних кретања, као на пример код клатна, балансијера и т. д. служи сама маса тих тела као магацин у који се гомила рад за време убрзаног кретања њиховог; тим се радом онда мора издржати у идућој периоди успорено кретање, тако да се од почетка убрзаног па до почетка успорног кретања, употребљена снага може тако сматрати, као да је употребљена на савлађивање осталих, од инерције масе независних отпора. —

255. Из свију досадањих посматрања о енергији можемо извести ова два закључка:

1. *Догод се брзина једне покретне масе не мења, нити се рад производи нити се троши.*

2. *Између два тренутка, између којих покретна маса има исту брзину, могу се ма колике количине рада производити или трошити, али увек мора бити збир произведених радова раван збиру утрошених или отпорних.*

Да применимо ове ставове о енергији на машине, које нам, као што знамо, служе на претварање појединих радова.

Као што смо већ раније приметили, код сваке машине имамо да водимо рачуна о ономе раду или о збиру свију оних радова, који за неко известно време на машину прелазе или које она прима и о ономе раду или о збиру свију оних радова, које машина за исто време има у облику отпора да изврши или да преда. Ако прве радове означимо као положне, ови су други одречни. Обе се те врсте рада садрже у оном мало час написаном збирном знаку за радове $\Sigma(R) = R$ (252). Према томе, ако оне радове, које машина прима, означимо са R_p а оне које издаје означимо са R_d имаћемо:

$$R = R_p - Rd = \Sigma\left(\frac{mv^2}{2}\right) - \Sigma\left(\frac{m v_0^2}{2}\right) \cdot \quad (136$$

Свака машина полазећи рецимо из релативног мира, после дужег или краћег времена заузме свој *нормалан ход*, т. ј. креће се *нормалном брзином*, која је или једнака (на пример код каквог хидрауличног точка) или периодички једнака (на пр. код шмркова, парне машине, и т. д.); у том случају збир предатих радова исто је онолики колики је и збир примљених радова т. ј. онда је

$$R_p = R_d$$

С тога вреди правило:

Код сваке машине, која је у нормалном ходу или која се креће нормалном брзином, збир примљених радова раван је збиру предатих или извршених радова. Ово је правило познато још и под другим једним именом. Оно се назива правило *о преносу рада.*

Кад такво стање код једне машиине наступи те да прираштај у раду буде управо онолики, колико треба да се сви отпори савладају, онда се, (као што смо видели) каже да је таква машина у *радној* или *динамичкој равнотежи.* У том специјалном случају горња једначина добија овај облик:

$$\Sigma\left(\frac{mv^2}{2}\right) - \Sigma\left(\frac{m\,v_0^{\,2}}{2}\right) = \Sigma\,(R) = 0.$$

Јер за све време нормалнога хода машине $v = v_0$.

256. Говорећи о ефекту (246) видели смо, да се са економског гледишта сви отпори, које једна машина или мотор има да савлађује деле на две групе: на *корисне* и *штетне* или *споредне.* Ако те две групе отпора или радова означимо овде са $R_к$ и $R_с$ онда је у опште:

$$R_д = R_к + R_с\,.$$

А кад је машина у нормалном ходу онда и

$$R_р = R_к + R_с$$

одакле

$$R_к = R_р - R_с$$

а то значи да је *корисни рад једне машине увек мањи од примљеног рада јер ни код једне машине $R_с$ није равно нули.* И та једначина (поред оне из 246) најочигледније показује како је немогуће остварити *perpetuum mobile.* —

Према ономе што смо напред навели о ефекту, корисност се једне машине може сада и у овом облику представити:

$$K = \frac{R_к}{R_р} = \frac{R_р - R_с}{R_р} = 1 - \frac{R_с}{R_р} \quad \dots \dots (137$$

257. *Примери.*

1. Један жељезнички воз од 100 тона са брзином од 10 мет., ваља зауставити на путу од 400 метара. — a) Колики отпор ваља да је у кочницама? — b) После ког времена воз ће се зауставити? — Колико губи воз у свакој секунди од брзине?

a) Отпор трења у кочницама ваља наћи из једначине

$$P = \frac{Q\,v^2}{2\,g\,s} = 1274{\cdot}2 \text{ кгр.}$$

b) Време ћемо одредити из средње брзине за успорено кретање кад ставимо $v = o$. Пошто је $s = \frac{c + v}{2} t$ то је

$$t = \frac{2s}{c} = 80 \text{ сек.}$$

c) По истом закону успореног кретања имамо:

$$a = \frac{c^2}{2s} = \frac{1}{8} \text{ м.} = 12{\cdot}5 \text{ см.}$$

2. a) Колики је механички рад сила код барутних гасова, који једном топовском зрну од 12 крг. саопште брзину од 500 мет.? — b) Колика је снага барута т.ј. притисак у цеви пошто се одузме отпор трења, кад је цев дугачка 2 мет.? — c) Колико убрзања стече зрно у цеви? — d) Колико дуго остане зрно у цеви? — e) Колики би могао бити корисни ефект једне машине кад би она, сваке секунде по једно такво зрно и са реченом брзином избацивала? — f) Кад се узме, да је цев са лафетом 300 пута тежа од зрна, дакле 3600 крг. колика је брзина трзања топа? — g) Колика му је енергија? —

a) Кад у општој једначини за енергију заменимо масу тежином и ставимо дате вредности добијамо:

$$R = \frac{12{\cdot}500^2}{19{\cdot}62} = 152905 \text{ мет. к.}$$

b) Пошто је $R = Ps = 152905$ m. k. онда је сама снага барута

$$P = \frac{152905}{2} = 76452 \text{ кгр.}$$

c) Убрзање одређујемо из једначине

$$a = \frac{v^2}{2s} = 62500 \text{ мет.}$$

d) Време пак из једначине (види горњи пример)

$$t = \frac{2s}{c} = \frac{1}{125} \text{ сек.}$$

e) Корисни ефект машине, која би толику исту куглу избацила сваке секунде са истом брзином добићемо кад енергију кугле поделимо са 75, дакле

$$E = \frac{152905}{75} = 2039 \text{ коњски снага.}$$

f) Снага барута дејствује у свима правцима једнаком јачином, па дакле дејствују на куглу и на топ једнаке силе али супротног смисла, и за исто време, т. ј док кугла не изађе из топа. Према томе количине кретања, које ће барутни гасови саопштити кугли и топу морају бити једнаки. Означимо непознату брзину топа са лафетом са x онда је

$$Mv = M_1 x$$

што кад заменимо добијамо:

$$x = \frac{M \cdot v}{M_1} = \frac{12 \cdot 500}{3600} = 1^2/_3 \text{ мет.}$$

g) А енергија топа је

$$R = \frac{3600}{19 \cdot 61} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^2 = 509 \cdot 7 \text{ мет. кгр.}$$

3. Кад један замајац тежи 4000 кгр., има у пречнику 5^m и окрене се 48 пута у минуту, колики је онда

a) рад који замајац прими и изда

b) колика би била енергија, кад би пречник точка био у пола толики?

a) Периферна брзина замајца је

$$v = \frac{d \cdot \pi \cdot n}{60} = \frac{5 \cdot 3 \cdot 14 \cdot 48}{60} = 12 \cdot 56$$

према томе рад замајца

$$R = \frac{Q \cdot v^2}{2g} = 32162 \text{ мет. к.} = 428 \cdot 8 \text{ коњ. снага}$$

b) Да је пречник у пола мањи и брзина би била у пола мања $= 6 \cdot 28$ па дакле и рад износи само четвртину горњег рада

$$\frac{428 \cdot 8}{4} \text{ к.} = 107 \cdot 2. \text{ к.}$$

4. a) Колика је водена снага једне реке од 60 мет. ширине 1·5 метра просечне дубине и 1 мет. брзине?

b) Колики би био рад те воде, кад би се удесило да пада преко једне бране од 1 метра висине?

a) Количина воде која протече у секунди износи

$$60 \times 1 \cdot 5 \times 1 = 90 \text{ куб. мет.}$$

Пошто је један куб. мет. тежак 1000 кгр. онда у 90 кубни мет. има 90000 кгр. па дакле и секундни рад т. ј. ефект

$$E = \frac{Qv^2}{2g} = 4587 \text{ мет. кил.} = 61 \cdot 16 \text{ коња.}$$

b) Кад та вода пада са висине од једнога метра онда је

$$Ps = 90000 \cdot 1 = 90000 \text{ мет. кгр.} = 1200 \text{ к.}$$

Дакле скоро 20 пута је већи рад. Из тога се види колики утицај има висина са које пада вода, рецимо код воденица.

5. Колико би коњских снага морала имати једна парна машина, која би једној маси као што је наша земља (5 квадрилијуна килограма тежине) дејствујући непрестано за 6000 година, саопштила толику брзину, какву има земља окрећући се око сунца (т. ј. 30000 мет. у округлој цифри)

5 квадрилијона су $= 5 \cdot 10^{24}$ кгр. Према томе енергија те масе

$$\frac{Qv^2}{2g} = \frac{5 \cdot 10^{24} \times 30000^2}{19{\cdot}62 \times 75} \text{ коња} = 32234 \times 10^{26} \text{ коња}$$

Означимо са x број коња које би морала имати парна машина и рачунајмо сваку годину по 365 дана $= 86400$ сек. онда ће цео рад те машине за 6000 година бити

$$x \times 6000 \times 365 \times 86400 \text{ коња}$$

одакле

$$x = \frac{32234 \cdot 10^{26}}{6000 \cdot 365 \cdot 86400} = \text{од прилике}$$

$$17{,,}000.000{,}000.000{,}000.000$$

т. ј. 17 трилијуна парних коња.

6. Кад се један камен од 1·5 кгр. руком вертикално у вис замахне до на висину $h = 0{\cdot}6$ па се пусти, те се он још сам попне 4 метра високо, пита се, са коликом је снагом он притискивао руку? — Ако је x тај притисак у килограмима, онда је рад његов па дакле и рад руке која је прешла висину h, раван xh. Тај је рад састављен из два дела: један је утрошен на савлађивање тежине тела и $= Qh$, а други на убрзавање камена извесном брзином v, па дакле $= \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} \frac{Q}{g} v^2$. Или ако у место $\frac{v^2}{2g}$ ставимо h^1 биће онда

$$xh = Qh + Qh^1 = Q(h + h^1)$$

одакле

$$x = Q\left(1 + \frac{h^1}{h}\right) = 11{\cdot}5 \text{ кгр.}.$$

7. Олучана цев једне пушке дугачка је $s = 80$ cm; фишек којим се та пушка пуни тежек је 25 гр. и у њему има 5 гр. барута. Кад тане у тој пушци добије брзину $v = 440$ мет. Пита се:

a. Колики је рад барутних гасова?

b. Колика је напонска снага тих гасова?

c. Колико је пута притисак тих гасова већи од притиска теже?

d. Колико убрзање стече тане у цеви?

e. За које време тане прође кроз цев?

f. Пошто завојна линија олука има 73·2 сантиметара дужине (висина завоја) док се тане један пут око себе обрне, колико се пута α) тане обрне у цеви, β) ван цеви у секунди?

g. Колика је α) брзина и β) енергија трзања пушке кад је она 4·5 кгр. тешка?

(Решење је слично за задатком 2)

У следећим двема таблицама налази се материјал за друге сличне задатке

	Немачка (Маузер)	Белгија (Comblain)	Данска (Remington)	Француска (Gras)	Енглеска (Henry-Martini)	Италија (Vetterli)	Холандија (Beaumont)	Аустрија (Werndl)	Русија (Berdan)	Сев. Америка (Springfield)
Калибар у милим.	11	11	11·44	11	11·43	10·4	11	11	10·66	11·43
Тежина пушке у кгр.	4·5	4·3	4·125	4·2	4	4·2	4·35	4·2	4·35	—
Дужина пушке (без бајон.)	1·33	1·21	1·282	1·305	1·18	1·345	1·32	1·3	1·36	—
Дужина метка у калибр.	2·6	2·27	2·2	2·5	2·7	2·4	2	2·3	2·5	2·5
Тежина метка у грамовима	25	25	25	25	31·1	20·4	21·75	24	24	26·2
Тежина барута у грамовима	5	5	3·9	5·25	5·5	4	4·25	5	5·07	4·52
Почетна брзина у метрима	440	400	381	440	416	430	425	430	436	—
Даљина брисања	1600	—	750	1600	1600	1000	750	1200	1600	—
Нишањених метака у минути	12	12	10	12	12	12	12	10	12	10

ТОПОВИ:	Крупови			Де Банжови		Армстронгови	
ДУЖИНА ЦЕВИ = 35 ПУТА КАЛИБАР							
Калибар цеви у cm:	24	30·5	40	34	37	30·5	43
Тежина цеви у тонама	22·24	49·2	121	53	72	44·35	101
„ зрна у килогр.	215	455	741	420	535	317·5	1000
„ барута у килогр.	98	162	279·2	164	246·5	147·4	350·5
Почетна брзина у метрима	600	565	615·2	600	600	547	558·8
Енергија: тотална у мет. тонама	3945	7409	14300	7710	9821	4842	15930
Енергија: на 1 cm обима топа у мет. тонама	52·32	77·28	113·8	72·18	84·4	50·5	117·3
Енергија: на 1 тону тежине цеви у мет. тонама	177·4	150·5	120	148·2	138·3	109·1	159·3

В. Облици енергије.

258. Кинетичка енергија. — Из досадањег посматрања енергије, видели смо да свака покретна маса има у себи извесну количину енергије, која се мери или производом $\frac{mv^2}{2}$, или обрасцем за рад $R = Ps$. И тај облик енергије, који у себи има тело *док се креће*, назива се нарочитим именом; он се зове: *радна енергија, динамичка енергија, кинетичка енергија, актуална енергија.*

259. Потенцијална енергија. — Али може у неком телу постојати енергије нагомилане а да се она не појави као рад; и једно релативно мирно тело може имати у себи нагомиланог рада као год и оно што се креће. На пример једно тешко тело, рецимо један камен тежине Q и масе $M \left(= \frac{Q}{g}\right)$, налазећи се подигнут на висину h, није никако у истом стању са гледишта енергије, као и један камен рецимо исте тежине али на површини земљиној. Јер ако уклонимо подлогу на којој је лежао онај узвишени камен, те он падне, онда ће тај камен самим својим падом стећи извесну количину радне енергије, која ће бити у толико већа у колико се он више приближује земљи, и која ће на самој површини достићи своју највећу вредност. Према томе тај је камен, док је био уздигнут и миран на подлози, имао у себи нагомилане енергије али је није могао показати све док се није подлога уклонила. Тај облик енергије, та мирна и нагомилана енергија у неком телу зове се *енергија положаја*, или *потенцијална енергија, латентна енергија, напонска енергија.*

Да зајиста једно тело може имати у себи енергију положаја, видећемо још боље из овог примера. Извесном количином радне енергије ми можемо неко тело масе m избацити на неку извесну висину h; тело ће се пењати све дотле, док сву количину енергије $\frac{mv^2}{2}$, која му је бацањем дата не потроши. Кад је тело на висини h изгубило сву брзину v, оно се враћа натраг и својим падом производи рад па дакле и радну енергију; кад падне на површину са које је пошло, оно ће вратити својим падом сву ону енергију која је на њ' била утрошена. Али ако ми тело кад се испне на висину h задржимо, оно неће моћи одмах да врати на њ' утрошену енергију бацањем, али ће она сва бити у њему нагомилана и вратиће је, чим се уклони подлога на којој оно лежи. И као што видимо потенцијална енергија тога тела није ништа друго до нагомилана она радна енергија, коју смо ми утрошили, кад смо тело на висину h попели.

Према томе, сва тела, која се налазе на извесној висини изнад земљине површине, или тачније говорећи, сва тела која се налазе на извесној даљини од средишта земљиног, имају у себи више или мање нагомилане потенцијалне енергије према висини над земљином површином или према даљини од земљиног средишта. Сва она тела, која се налазе на другом спрату једне куће, имају у себи више потенцијалне енергије но она тела, која су на првом спрату а ова опет више од оних при земљи, јер је највише утрошено рада за подизање оних тела која су на другом спрату, мање за она на првом а најмање за она при земљи. Сва та тела притискују на своје подлоге, само је притисак оних тела која су даља од површине земљине способан за рад, док код оних, која су на самој површини, и која дубље у земљу не могу продрети, тај је притисак за рад неспособан. Камен, који је на врху брега, у бољем се положају налази са гледишта енергије но онај на подножју брега. Енергија утрошена на испаравање воде и издизање водене паре у облаке, враћа се на најразноврсније начине, роњењем брегова, ношењем лађа, обртањем воденица и т. д. док не достигне морско корито. У облаку је потенцијална енергија воде максимум, а у мору равна је нули.

Као што можемо у једном телу да нагомиламо више или мање потенцијалне енергије, износећи га на већу или мању висину изнад земљине површине, исто тако поремећајем равнотежних положаја његових молекила, можемо у некоме телу нагомилати молекилске потенцијалне енергије. Кад затегнемо лук једне стреле, ми смо нашу мишићну енергију пренели и нагомилали у молекилима лука, који се сви сад налазе у облику потенцијалне енергије, све док лук не окинемо и стрелу не избацимо. Навијањем џепних сахатова, трошимо једну извесну количину мишићне динамичке енергије и гомиламо је у напону челичне опруге сахатне у облику напонске енергије; она ће се поступно претворити у радну енергију кретањем целог сахатног механизма. У опште кад ми неко тело притиснемо, савијемо, или истегнемо, ми реметимо положаје његових молекила а тиме нагомилавамо у њима потенцијалну енергију услед које се они враћају у свој пређашњи положај враћајући на њих утрошену количину енергије у кинетичком облику. За сва та навијена, затегнута, притиснута и повијена тела каже се, да су у неком извесном *напону* и за то се тај облик енергије зове још и *напонска енергија*.

Нарочито интересан пример напонске енергије имамо код биља. Као што је познато, у ваздуху се налази у извесној мери угљене киселине (CO_2) која постаје услед разних биљних и животињских трулења, као и услед дисања. Биљке се ране угљеном киселином и то на тај начин, што се у њиховом лишћу, услед енергије сунчевих зракова, угљена киселина распада на кисеоник и угљеник; угљеник узме биљка за себе а кисеоник се врати ваздуху. Услед рада дакле сунчевих зракова унутрашња веза између кисеоника и угљеника је раскинута и угљеник је нагомилан у биљци а кисеоник у ваздуху. Кисеоник и угљеник су дакле извесан рад на своје растављање утрошили и налазе се један према другом у потенцијалој енергији. Услед тога напонског стања у коме су, они се могу опет сјединити чим им се прилика укаже, а то обично бива приликом сагоревања, чиме производе топлоту, дакле радну енергију.

Кад стаклену шипку протремо једном вуненом крпом, шипка ће се наелектрисати положно а крпа одречно; оба се та електицитета привлаче и теже да се сједине. Овде је дакле динамичка енергија трења претворена у напонску енергију, коју овде зовемо електричним привлачењем и која је у стању да произведе опет радну енергију. Кад тела која те две врсте електрицитета у себи имају приближимо, она ће се привући и најзад ће између њих искочити варница; дакле постала је топлота и светлост па дакле и радна енергија.

260. Тотална енергија. — Количина потенцијалне енергије, која се налази у навијеној челичној опрузи код џепног сахата, зависи од количине радне енергије која је у њој нагомилана. Ако смо кључем окренули само два или три пут, опруга није примила онолико енергије колико је она у стању да прими, па с тога неће моћи ни произвести онолико радне енергије, колико је потребно да сахат дуже времена ради. Ова, само до неке извесне мере нагомилана енергија у неком телу, назива се *пар-*

цијална или *делимична енергија*. Али ако смо дали опрузи њен максимални напон, т. ј. ако смо је навили до краја, она ће произвести одвијајући се сву количину радне енергије, коју је у стању примити у себе. Та највећа количина потенцијалне енергије, коју челична сахатна опруга може да накупи зове се *тотална, укупна енергија*.

Према томе, тотална енегија те челичне опруге јесте она количина енергије, коју је она у стању било накупити пошав од потпуне лабавости па до највеће затегнутости, било повратити пошав од највеће затегнутости до потпуне лабавости.

Исти је случај и са обичним тешким телима. Ако однесемо један камен на разне висине, ми ћемо у њему гомилати у толико веће количине потенцијалне енергије у колико га на већу висину подижемо. Да би тежа постигла највеће своје дејство, т. ј. да би нагомилали у телу највећу могућу количину потенцијалне енергије, требало би га удалити од земље тако далеко где би привлачна снага била равна нули, т. ј. у бескрајност.

У место да узмемо тело ма колике масе, узмимо јединицу масе и однесимо је у мислима у бескрајност. И она количина радне енергије или рада, коју би та јединица масе могла прикупити у себе у облику потенцијалне енергије кад би била однесена у бескрајност, или што је све једно: она количина радне енергије или рада, коју би та јединица масе произвела павши на земљу из бескрајности, јесте њена *тотална енергија* или *потенцијал*.

Према томе *тотална енергија* или *потенцијал једног материјалног система, јесте максимум енергије коју може тај систем или прикупити у облику потенцијалне енергије а под утицајем сила којима је изложен, или произвести у облику радне енергије под утицајем истих тих сила.*

C. Похрана, консервација енергије.

261. Кад на један покретан систем *A*, који дакле за то што се креће садржи у себи извесну количину енергије, никакав утицај са стране не дејствује, онда остаје количина његове енергије стална и непромењена, јер му маса остаје стална и јер се брзина његова може само утицајем са стране изменити. Али кад на тај систем деј-

ствује ма какав утицај са стране, кад се дакле на њега троши неки извесан рад, онда тај рад прелази на систем *A* и у њему се јавља као нова количина енергије (положна или одречна). *Услед* тога ће се страног утицаја количина енергије у систему *A* променити и то за величину $\frac{mv^2}{2}$, која је, као што знамо из првога закона, равна утрошеном раду Ps. Кад сад тај систем *A* дејствује на друго неко тело или на други неки систем *B* и у њему произведе неки известан рад P_1s_1 онда ће он према другом закону потрошити од своје енергије онолику количину која томе раду P_1s_1 одговара, т. ј. $\frac{mv_1^2}{2}$. Посматрани је дакле систем *A* примио у себе услед страних утицаја енергије

$$Ps = \frac{mv^2}{2}$$

а утрошио на систем *B*

$$P_1s_1 = \frac{mv_1^2}{2}$$

остало је дакле у систему A свега енергије

$$Ps - P_1s_1 = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = \frac{m}{2}(v^2 - v_1^2)$$

то значи, да је прираштај енергије у неком систему маса раван разлици између примљеног и утрошеног рада. Но како смо казали, да је систем *A* дејствовао на систем *B*, т. ј. да је систем *A* произвео на систему *B* неки известан рад P_1s_1 то онда *рад какав вршити, значи преносити енергију*. Из тога излази да се енергија може са једног система на други или на више других система преносити, делити, прикупљати и то под различитим облицима. Али увек кад се какав рад врши мора бити најмање два материјална система од којих један, известан део енергије даје а други прима. И онда се каже, да први систем ради на другоме или за онај други систем.

Ако је количина рада, коју је неки систем *(A)* са стране добио у облику енергије, равна оној количини, коју је тај систем пренео на неки други систем (B), онда је разлика између примљеног и утрошеног рада равна нули, па дакле и промена енергије на првом посматраном систему *(A)* равна је нули. (Истина може после примљеног и утрошеног рада расподела енергије на томе истом систему бити друга но пре тога, она се може пренети са једног дела тога система на други његов део, али ће ипак целокупна количина енергије у целом систему остати иста).

Из тога излази овај закон:

Кад се у некоме покретном систему изврше разне промене у количини његове енергије, па после свију тих промена кад не наступи никакав прираштај ни мањак, ни у примљеном ни у утрошеном раду, онда је збир енергија целога система остао исти, или *онда је збир енергија у томе систему стална величина.*

Ова се истина зове став о *консервацији* или *похрани енергије.*

Згодан пример за став о похрани енергије била би једна машина у динамичкој равнотежи. Нове количине водене паре дају машини нове количине енергије; с друге стране она се на разне отпоре троши али нити је издатак већи од примања ни примање веће од издатка; брзина кретања машине остаје иста. Може се десити да у целој машини, у том управо систему маса, други се неки делови сад брже крећу, да је већи рад пренешен на другу коју страну машине него мало час, али ако је само цела машина, т. ј. цео систем у динамичкој равнотежи, т. ј. ако је њена брзина остала иста, онда је и збир свију енергија у њој, (ма како оне биле растурене по појединим деловима њеним) иста и стална величина.

Пренесимо сад овај став о похрани енергије са система маса код једне машине, на систем маса у целој васиони. И за њу мора тај став важити, јер је принцип о консервацији енергије само последица она два општа закона о енергији у вези са појмовима о потенцијалној и кинетичкој енергији. По првом закону, остаје енергија једнога система маса иста, кад свакоме примљеном раду одговара иста количина утрошеног рада, остаје дакле и онда иста, кад је примљени рад раван нули а тако исто и утрошени раван нули. Код система маса у васиони, и примљени као и утрошени рад с поља раван је нули, јер изнад маса у васиони других маса нема, које би рад могле или предати или примити.

По другом закону о енергији, кад каква енергија врши неки извесан рад, онда је тај рад исто толики колика и енергија, па била та енергија потенцијална или кинетичка. Број метаркилограма остао је исти, само је на пример у место динамичке енергије дошла исто толика количина потенцијалне енергије или обратно. Јер исто тако, кад потенцијална енергија прелази у радну, онда је по првом закону рад или потенцијална енергија равна кинетичкој енергији; и сад је број метаркилограма остао исти, само је на место потенцијалне енергије дошла кинетичка. Према томе у целој васиони број метаркилограма нешто у облику потенцијалне нешто у облику кинетичке енергије остаје исти и непроменљив, па се за то може у опште рећи:

„*Збир кинетичке и потенцијалне енергије у васиони је сталан*“.

Или ако под појмом „енергија“ разумемо оба облика њена, као што смо то чинили и док смо говорили о енергији у опште, онда можемо рећи:

„*Количина енергије у васиони јесте стална*“.

Или другим речима још:

„*Енергија се не може ни створити ни уништити*“.

Поред разлагања које смо напред навели и из којих се јасно види како треба схватити закон о похрани енергије, ми ћемо сталност количине енергије у васиони још боље разумети на овом једном примеру. Узећемо један камен од 20 кгр. тежине и бацићемо га вертикално у вис брзином од 50 мет. На њега ћемо пренети кинетичку енергију од $\frac{1}{2} m v^2 = 2500$ мет. кил. Услед ње, камен ће моћи извршити извесан рад, који по величини мора бити раван утрошеној радној енергији, и попети се на висину $\frac{v^2}{2 g} = 125$ мет. Кад се на највишој тачки својега пута зауставио, у камену се налази нагомилана потенцијална енергија од 2500 м. кл. коју ће при паду свом натраг моћи претворити у кинетичку енергију. Дакле у опште, целокупна количина енергије којом располаже тај камен износи 2500 мет. кил. било у облику само радне енергије кад је на земљи, било у облику само потенцијалне кад је 125 мет. високо над земљом. — Испитајмо стање камена после пада од једне секунде. После прве секунде, његова је брзина округло 10 мет (у место 9·81), па дакле енергија 100 мет. кил. Пут који је дотле прешао, износи $\frac{1}{2}$ g $t^2 = 5^m$, дакле остаје му још пут од 120 мет. Колика је његова потенцијална енергија на томе месту? Пошто је тежина 20 кгр. а заостали пут 120 мет. то је пот. енергија = 20 × 120 = 2400 м. к. Кад томе додамо добијених 100 м. к. радне енергије, имамо свега 2500 мет. кил. дакле онолико исто колико и у почетку падања. — Какво је стање камена после 2 сек.? Брзина му је 20 мет., дакле кинет. енергија = 400 м. к. Пут после две сек. износи 20 мет. а остаје му још 105 мет. за које износи потенцијална енергија 20 × 105 = 2100 што са осталих 400 чини опет 2500 м. к. Опет је збир кинетичке и потенцијалне енергије остао сталан. — После 3 секунде брзина је камена $v = g\,t = 30^m$, дакле радна енергија 900 м. к.; пређени пут износи 45 мет. остаје још 80^m за које је потребна потенц. енергија 20 × 80 = 1600. И сад је збир од 900 м. к. радне и 1600 м. к. потенцијалне енергије сталан и = 2500 м. к. — На и после 4 секунде доћићемо до истог резултата, јер је онда његова брзина v = 40 дакле радна енергија = 1600 м. к. Од почетка до сад пао је на 80 м. остаје му још 45 што у облику потенц. енергије износи 20 × 45 = 900, што кад скупимо са радном енергијом од 1600 м. к. опет излази 2·500 м. к. Најзад на крају пете секунде камен пада на земљу брзином од 50 мет. дакле са кинетичком енергијом од 2500 мет. кил. Из овога смо примера видели, како је збир потенц. и кинет. енергије, у сваком тренутку и на целом путу био сталан и раван 2500 м. кил. Али он је био сталан јер на камен ни у пењању ни у падању није никаква страна сила дејствовала осим теже, којом је ту енергију и стекао. Па како смо већ напоменули да на систем маса у васиони никаква страна сила не може дејствовати јер не постоји, то је очевидно да тај став вреди и за целу васиону.

Исти је такав случај и са клатном. Кад клатно пролази кроз равнотежни положај, дакле кад достигне највећу брзину, онда има само кинетичке енергије; на против кад се највише удали од равнотежног положаја, кад му је брзина = о, онда је у њему нагомилана само потенцијална енергија. У свима пак осталим међуположајима, има и једне и друге енергије, али је увек сума обеју њих стална и равна оној највећој суми или само кинетичке или само потенцијалне енергије.

262. Закон о похрани енергије, који је основа свима природним наукама има вишестрани значај. У томе је закону најпре изречено, да све кинетичке и све потенцијалне енергије скупа узете, износе увек исту количину да се дакле рад или енергија не може ни уништити, нити пак из ничега створити. Поред тога из тога принципа излази мисао о променљивости енергије; јер су све природне појаве само разне врсте енергије, то су само прелази једне врсте кинетичке енергије у другу врсту опет кинетичке енергије, или прелаз кинетичке енергије у потенцијалну или прелаз из потенц. енергије у кинетичку или најзад прелаз потенцијалне енергије опет у потенцијалну. — Све те размене и прелази дешавају се тако, да је целокупна количина енергије, број метаркилограма којима се мери и кинетичка и потенцијална енергија, после размене исто толики, колики је био и пре размене.

Има доста примера на којима се на први поглед види и схваћа претварање једних облика енергије у друге. Али их има и таквих, код којих изгледа, као да се један облик енергије сасвим изгуби и да не прелази у други нама познати облик. Са тим ћемо се примерима још мало забавити. Познато нам је већ, да ће једно тело, падајући са висине вертикално на ниже пасти на земљу са целом оном количином кинетичке енергије са којом је и бачено било; у горњем примеру она је износила 2500 мет. кил. Кад падне на земљу, тело ће угнути нешто мало земљу, угнуће се мало и само тело али на све то нису утрошени свих 2500 мет. кил. Изгледа као да је готово сва та количина енергије овде изгубљена, јер не видимо шта је од ње било после пада. Међу тим, кад бисмо били у стању да измеримо температуру тела пре и после пада, ми би нашли, да је тело после пада топлије но пре пада, и кад би одредили повећану количину топлоте у њему као и у земљишту на које је тело пало, као и кад би урачунали ону енергију, која се утрошила на постанак звука, који сваки такав пад прати (сем осталих губитака) нашли бисмо да је та количина управо онолика, колика је била енергија са којом је тело пало на земљу. Дакле ту је енергија прешла у сасвим другу врсту енергије, прешла је у топлоту и звук.

И онај рад, који се троши код трења претвара се у топлоту. Енергија, коју има у себи палидрвце кад га брзо кренемо, пређе сва у топлоту услед које се оно и запали. Трењем точкова о ненамазане осовине, могу се осовине усијати и запалити. Поред примера где се камен кад падне на земљу загреје, имамо још лепши пример где се енергија ударања и падања претвара у топлоту на ковању. Вешт ковач може самим ковањем, један јексер усијати. Енергија се и рад могу претворити у топлоту и кад гасове сабијамо; рад који утрошимо да неку запремину гаса сабијемо, претвара се у топлоту јер се сабијени гас загреје. Озвездине пролазећи кроз ваздух, врло велики део енергије свога кретања изгубе трењем о ваздушне молекиле али се услед тога трења и усијају. Све су то примери, по којима се енергије или рад тела претвара у топлоту, која опет са своје стране није ништа друго до енергија молекила, те према томе енергија је остала иста, само је променила врсту, из енергије тела прешла је у енергију молекилску.

Исто тако сва хемијска јединења и распадања су само разне врсте енергије и то енергије атома тела. Ми смо већ напред видели у каквој се напонској енергији налазе атоми кисеоника у ваздуху и угљеника код биља па и код животиња, јер су процеси дисања животиња у свему слични са хемијским сагоревањем; свако дрво, сваки мајдан каменог угља може се упоредити са једним језером на врху каквога брега; јер су и угљени мајдан као и језеро резервоари у којима је нагомилана потенцијална енергија, само код мајдана атомска а код језера телесна. Јер дође ли комад угљена или парче дрвета у згодне прилике са кисеоником, одмах се њихове потенцијалне енергије претварају у радне, која се преноси на молекиле и јави нам се као топлота и светлост. Ако се то деси под казаном парне машине, онда се та топлота, та кинетичка енергија молекила пренесе на воду, на њене молекиле, који се такође загреју. Услед те топлоте вода испарава, т. ј. радна молекилска енергија пређе у напонску молекилску енергију водене паре, која опет доведена у згодне околности креће клип парне машине те дакле енергија оставља свој напонски облик у молекилима и прелази као радна енергија на поједине делове машине. Са парне машине преносимо кретање на поједине алатке какве стругарнице, видимо где пара креће тестере, стругала, сврдлове и т. д. и ту нам изгледа да смо изгубили траг раду свију тих справа јер га у њима нестаје. Међу тим свака се та справа вршећи свој посао јако загрејала, а загрејала је и она дрва са којима долази у додир те тако видимо где је енергија тела заузела опет облик молекилске енергије какав је имала пре него што је и ушла у тело.

Растварање угљене киселине код биља на кисеоник и угљеник, дешава се у лишћу и то у њиховим ћелијама Свака биљна ћелија излази у том послу као засебан радник, она се креће на једну и другу страну, она расте и спаја се са другима исте или сличне врсте, и на тај начин дају карактеристичан облик и листу и целој биљци Не мање су радне и оне ћелије које своју рану сишу из земље. Посматрајући једну ћелију било биљну или животињску под микроскопом, можемо је потпуно упоредити са каквом машином, јер као год што разни делови једне машине стичу своја кретања на једну исту страну, на осовину машине у којој је оличена цела та справа, исто тако разне ћелије биљне или животињске стичу своје радове у једну целину, која се јавља или као готова биљка или као животиња, несвесна или свесна свога положаја у природи.

Кретањем ћелије постаје ћелијчна енергија која се разликује од осталих врста енергија. Истина је да је ћелија састављена из све самих молекила и атома који се у њој крећу; али тим самим што се ти атоми и молекили спајају у ћелију, тим самим кретање ћелије као целине, па дакле и њена енергија не ће бити исте природе са молекилском и атомском. Јер и тело је свако састављено из молекила, па је сасвим другојача енергија тела, од енергије његових молекила; ону прву зовемо просто енергија, а ову другу називамо топлотом или звуком и т. д. И молекил је састављен из атома, па ипак чим енергија пређе на атоме, појави се у другом облику: као хемијска реакција и није више истоветна са молекилском. С тога смо дакле принуђени да одвојимо кретања ћелије од осталих, да одвојимо ћелијчну енергију од осталих и да њој дамо засебно место као и свима осталима.

Кад молекили некога тела затрепере на известан начин, ми кажемо да то тело звучи; ми дакле ту врсту енергије молекила зовемо засебним именом. Кад молекили тела затрепере рецимо више од педесет хиљада пута у секунди, звука више нема; онда молекилска енергија не утиче више на наше уво; њу онда осећа наша кожа, и ми онда тако брзо и још брже треперење молекила зовемо топлотом. Топлота је дакле такође молекилска енергија као и звук само се од њега разликује већим интензитетом.

Топлота само до некле утиче искључиво на нашу кожу, јер од извесног броја трептања молекила па на више, топлота постаје видљива, она постаје светлост и утиче на сасвим други орган нашега тела: на око. Колики ће пак бити број треперења молекила, који дају светлост, зависи од тога, да ли ће нам се светлост јавити у овој или оној боји. Али ако број треперења пређе неку извесну границу, и топлоте и светлости нестане као што је нестало и звука кад је број треперења прешао преко извесне границе.

Ми дакле за молекилску енергију имамо разна имена: час је зовемо звуком, час топлотом, час опет светлошћу, а у другим приликама и електрицитетом и магнетизмом. Све су то разна имена за једну исту врсту енергије за молекилску енергију. А како зовемо ћелијчну енергију? У обичном животу она је давно добила своје име и много пре, него ма који други облик енергије. Као год што се каже да једно звоно звучи, да ватра греје, да свећа светли и т. д. исто се тако каже да једна биљка, да једна животиња *живи*. Али и звоно звучи јер му звучи сваки молекил; ватра греје јер је врео и сваки молекил, свећа светли, јер јој је светао и сваки молекил, тако исто и животиња живи, јер јој је жива и свака ћелија, а ћелија живи јер се креће, јер у њој постаје засебна врста енергије, која није ни топлота ни светлост ни звук, ни хемијски афинитет, ни електрицитет, него *живот*. Све остале врсте енергије конкуришу да живот постане, али ма да је он из свију њих постао ипак он је засебна врста енергије. Живот је за ћелију оно, што је звук, што је топлота или светлост за молекил. Живот је ћелијчна музика.

Животињско и биљно тело је права лабораторија, у којој се праве све врсте енергије, у којој се те разне врсте међу собом спајају, или једна у другу претварају или тако справљају да из њих постане ћелијчна енергија или живот.

Из досадањег излагања видели смо, како се све врсте енергије могу претворити једна у другу. Из енергије тела постаје енергија молекила и атома, из ових постаје енергија ћелијчна, која пак са своје стране може да пређе и у атомску и у молекилску као и у телесну енергију. Али ма како разноврсна била претварања енергије, овде на земљи, ма колико се разликовале поједине њене врсте међу собом, ипак је свима тим врстама енергије само један извор и то сунце, јер целокупно кретање на земљи, па дакле и сва енергија на њој долази од сунца. Не зависи само успевање биља и животиња од сунца, него и све друго успева и напредује само са сунца. Напонска енергија водених молекила у облацима, на снежним бреговима, у текућим потоцима и рекама, јесте посао сунчевих зракова; ветар који креће ветрењаче и бродове, постаје једино услед разног загревања ваздуха од стране сунца. Свој нашој техничкој индустрији основица је угљен, а угљен опет није ништа друго до нагомилани сунчеви зраци; електрична струја којом рукује телеграфиста или која креће разне справе у електричној индустрији, постаје горењем угљена било у батеријама било у динамо-машинама, дакле опет помоћу сунчеве топлоте. Па и ми сами нисмо ништа друго до концентрисани сунчеви зраци, јер смо састављени из таквих материја, које су све постале услед сунчеве топлоте, јер и ми за наше одржање трошимо у облику ране угљен, коме је постанак у сунчевој топлоти. Па с тога се с правом за цео земни живот каже, да је то рад сунчев.

Али ма како се те поједине врсте енергије претварале једна у другу, ма колике биле апсолутне количине сваке од њих у неко извесно доба, ипак збир свију њих дакле целокупна количина енергије у васиони је стална. Узмимо један пример из обичног живота, па ћемо видити да у њему нису преко целе године све врсте енергије у једнакој количини. Ћелијчне енергије на пример највише има до јуна или јула месеца, јер се дотле највише биље развија. Чим почне прва косидба или жетва, ћелична се енергија претвара, горењем сламе, или трулењем појединих делова биљних у молекилску и атомску енергију, које све више расту по количини, што се већма приближујемо зими, кад све лишће опадне и свака се ћелична радња више или мање утиша. Лети се много више путује но зими, дакле онда железнички возови и пароброди достигну највећу количину енергије преко целе године. Сва врења воћа бивају у јесен и онда атомска енергија постигне свој максимум. Зими загревањем станова највише производимо топлоте, па дакле и највише молекилске енергије Према томе и сам наш живот показује у неколико, како час преовлађује једна, час друга врста енергије; у пролеће има највише ћеличне енергије, лети највише енергије тела; у јесен атомска а зими молекилска енергија достигну свој максимум. Али ако ма у које доба правимо биланс свију врста енергије на земљи, са неистинитом претпоставком да јој никаква енергија са стране (н. пр. сунца) не долази, ми ћемо целокупну њену количину наћи исту т. ј. рачунали ми ма у које доба године целу количину енергије на земљи, увек ћемо наћи исти број метаркилограма. Раширимо тај појам на целу васиону, па ћемо лако схватити, како количине разних врста енергије могу у разно доба бити разне, али целокупна сума енергије у васиони јесте и остаје стална.

D. Класификација енергије и природних наука.

263. Проучавајући природу, ми смо дошли до закључка да у природи постоји само енергија. Па кад смо у почетку још рекли да су природне науке оне, које изучавају природу, сад можемо тачније одредити задатак природних наука и рећи:

природне су науке оне, које се баве изучавањем енергије.

Пошто има разних врста енергије, и природне се науке разликују међу собом према томе какву врсту енергије специјално проучавају. Ми ћемо покушати да изведемо природну класификацију енергије а с тим и природну класификацију природних наука.

У изразу који представља енергију, може се мењати и маса и брзина, те према томе бројна његова вредност зависи од оба та чиниоца у исти мах. Међу тим што се тиче врсте енергије, она зависи само од врсте у којој се јави маса у том изразу. Јер брзина се може мењати ма на који начин, енергија ће се исто тако мењати али само по бројној својој вредности. На против и од количине масе зависиће бројна вредност енергије, али неће бити све једно, да ли се код некога тела крећу сви његови молекили једнаким и паралелним путањама, т. ј. да ли се креће тело као целина, или то тело стоји, а у њему се крећу само његови молекили, или атоми и т. д. Кретање тела не ће дати исту ону врсту енергије коју и молекили, а ови опет не исту, као атоми и т. д. Према томе принуђени смо природом саме ствари коју испитујемо, да класификацију енергије изведемо по врстама, које у изразу за енергију може заузети маса.

Ми смо још у почетку, приликом дељивости материје видели, да се целокупна материја јавља у четири облика или врста: у виду тела, молекила, атома и ћелије. Па како је сваки тај облик материје представљен својом масом, то је очевидно, ако у изразу за енергију

$$E = \frac{mv^2}{2}$$

под m разумемо масу целога тела, да ћемо имати и *енергију тела*, ако m значи масу молекила, цео израз представљаће *енергију молекила*; маса атома даће *атомску енергију*, а масе ћелија даће *ћелијчну енергију*. Поред тога што је та класификација енергије најпростија и само нас посматрање енергије у природи упућује да је на те врсте поделимо. Дакле колико видова масе налазимо у природи, толико исто има и видова енергије у њој.

Шта је то енергија тела?

264. Ми знамо шта је то тело. И кад се то тело креће, да сви његови делови прелазе или исте или сличне

путање у исти мах, онда пред собом имамо кретање целога тела. Тако се креће бачен камен, тако се креће и топовска кугла, тако се креће и земља око сунца, као и само сунце. У свима тим случајевима, као и у безброј других случајева, брзина у горњем обрасцу значи брзину тела, а *m* значи масу тога тела а све заједно енергију тела.

За таква кретања, где се цело тело креће каже се да су *механичка*. Према томе падање камена, кретање железнице, ток воде, лет тице, окретање месечево, кретање звезда и т. д. и т. д. све су то механичке појаве. Науке пак, које таква кретања испитују називају се према томе *механичким наукама* или једном речи *механиком*. *Механика је дакле наука о енергији тела* и представљаћемо је симболичким изразом

$$\frac{M \cdot V^2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (138$$

265. Ми налазимо у природи и таквих појава, где се тело релативно не креће међу тим се његови молекили најразноврсније крећу: једни брже, други спорије, једни у једном други у другом правцу. Кад лупимо о сто, он се ни у колико није с места померио, те дакле сто, као тело не креће се, међу тим нема ни једног његовог молекила, који је остао на миру. Сваки је затрептао извесном брзином, и произвео на тај начин своју молекилску енергију т. ј. звук. Скуп свију тих кретања заједно, скуп целокупне енергије молекила тога стола, пренесен је кроз ваздух до нашега ува и у њему покренуо слушни нерв, т. ј. ми смо га чули. Као што видимо, да тело звучи, није довољно да га преместимо с једног места на друго, другим речима енергија тела није звук. Звук је молекилска енергија некога тела. На исти начин као и звук, т. ј. кретањем молекила постаје и топлота; молекилска је енергија и светлост а тако исто и електрицитет и магнетизам.

Тела се могу кретати или појединце или више њих заједно. Међу тим, нема нигде у природи случаја, где би могли наћи један молекил за се одвојен, већ је увек безброј њих заједно. С тога говорећи о молекилској енергији некога тела, ваља увек подразумевати скуп више њих. Из тог узрока, наш ће израз у том случају више одговарати истини, ако испред њега напишемо збирни знак:

$$\Sigma\left(\frac{m\,v^2}{2}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots (139$$

који ће нам сад представљати симболички молекилску енергију.

Све појаве, које постају услед кретања молекила, појаве, које су израз молекилске енергије без обзира какве је природе материја, чији се молекили крећу, зову се *физичке појаве*. С тога се оне природне науке, које испитују молекилску енергију, називају *физичким наукама*. Према томе у опште говорећи, *физика је наука о молекилској енергији*.

266. Има и таквих појава, где главну улогу играју атоми. Више пута атоми се из једног молекила разиђу, т. ј. молекил се разбије и растури и његови се атоми састају са атомима молекила друге врсте. У том случају, појаве узимљу на се сасвим други облик, јер их производе кретања атома; ми имамо пред собом енергију атома или тако зване хемијске појаве. *Хемија је дакле наука о атомској енергији*.

Пошто и овде можемо посматрати само енергију више атома од један пут, то очевидно и овде ћемо морати ставити симболички знак збира. Кад још означимо масу атома са μ и брзину са β, да би их разликовали од молекила, имаћемо хемијске реакције представљене овим знаком:

$$\Sigma\left(\frac{\mu\beta^2}{2}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots (140$$

267. Четврти облик масе, који може доћи у образац за енергију јесте маса ћелија̂, која ће нам дати ћелијчну енергију. Ми смо мало час видели да се под именом ћелијчне енергије крију животни појави. Па како се међу природним наукама, оне, које изучавају животне појаве зову биолошким наукама, то је онда *Биологија наука о ћелијчној енергији*. И овај се облик енергије даје представити горњим обрасцем, само ћемо ради разликовања масу означити са *м* а брзину са *б*, па ће бити животни

појави симболички представљени:

$$\Sigma\left(\frac{мб^2}{2}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

268. То су четири облика енергије у којима је ми налазимо у природи; то су дакле и четири групе природних наука. Сваку од њих можемо рашчланити на више чланова па тиме добити целокупну слику природних наука. Ми ћемо се зауставити на главнијим наукама:

васионска енергија	Енергија тела (Општа механика)	Астрономија Механика
	Молекилска енергија (Општа физика)	Метеорологија Физика Астрофизика
	Атомска енергија (Општа хемија)	Хемија Минералогија са Геологијом
	Ћелијчна енергија (Општа биологија)	Ботаника Зоологија са Антропологијом.

Астрономија се бави кретањима небеских тела и за то се врло често зове небеском механиком, што у самој ствари и јесте. Метеорологија могла би доћи и у механичке науке јер многе појаве, које она испитује, нарочито ваздушне струје и кретања воде су често механичке природе. Али како су и самим ваздушним и воденим струјама узроци чисто температурски, а поред тога у предмет метеорологије долази сама температура и хигрометрија дакле чисто физичке појаве с тога она долази у групу физичких наука и испитује физичке појаве у земљиној атмосфери и на земљиној кори. Метеорологија би се могла назвати физика атмосфере и земљине коре. Исто тако овде долази и Астрофизика, која се бави физичким особинама небеских тела; пошто се пак својим методама приближује хемији, (а нова су испитивања астрофизичка чисто хемијске природе) то је и физика небеских тела ближа хемији но астрономији.

Кад не би физика и хемија и иначе биле огромне науке, минералогија би се могла потпуно распасти на физику и хемију. Кристализација, т. ј. молекилско наслагање у кристалима јесте предмет молекилске статике, дакле физике, док хемијска анализа минерала тим самим спада у хемију. Исти би случај био и са геологијом, само би извесни њени делови припали ботаници и зоологији. Геологија као засебна наука постоји због тога, што испитује разне појаве горе поменутих врста, које се специјално тичу наше земље.

269. Сви се горе наведени облици енергије могу претворити један у други као што смо то напред показали примерима. Сад ћемо само да саставимо један табеларни преглед претварања разних врста енергија међу собом. Ево тог прегледа:

1. *Претварање енергије тела у енергију тела.* — Ударом било централним било ексцентричним; трансмисијом код машина и т д.

2. *Претварање енергије тела у молекилску енергију.* — Топлота при свима ударима и трењу; компресијом гасова и течности.

3 *Претварање енергије тела у атомску енергију.* — Може бити код експлозивних материја. Иначе само прелазом кроз други какав облик.

4. *Претварање енергије тела у ћелијчну енергију.* — Само прелазом кроз друге облике.

5. *Претварање молекилске енергије у молекилску.* — Топлота у светлост, електрицитет, звук, и обратно.

6. *Претварање молекилске енергије у атомску.* — Изазивање хемијских реакција топлотом, светлошћу и електрицитетом.

7. *Претварање молекилске енергије у ћелијчну.* — Изазивање свију животних појава код зачетака биљних и животињских топлотом, светлошћу и т. д.

8. *Претварање молекилске енергије у енергију тела.* — Парне и гасне машине; огњено оружје; бацање стрела и т. д.

9. *Претварање атомске енергије у атомску.* — Узајамно дејство хемијских реакција код већине хемијских једињења и распадања.

10. *Претварање атомске енергије у ћелијчну.* — Процеси рањења и дисања код биља и животиња.

11. *Претварање атомске енергије у енергију тела.* — Само прелазом кроз молекилску енергију.

12. *Претварање атомске енергије у молекилску.* — Произвођење топлоте горењем; електрицитета и светлости хемијским реакцијама.

13. *Претварање ћелијчне енергије у ћелијчну.* — Процеси плођења код животиња и биља.

14. *Претварање ћелијчне енергије у енергију тела.* — Кретање животињских тела; механички рад животиња.

15. *Претварање ћелијчне енергије у молекилску.* — Кретањем мишића тело се загреје; температура мозга се мења при умном раду.

16. *Претварање ћелијчне енергије у атомску.* — Трулење и распадање ћелија у живом телу као и после смрти.

ДЕО ПЕТИ

АПСОЛУТНО МЕРЕЊЕ

270. Опште одредбе. — Цела данашња наука оснива се на међусобном упоређивању разних природних величина, које она испитује, т. ј. на мерењу. Измерити неку дату величину значи, тражити колико се пута садржи у њој, друга нека величина исте врсте, која је узета за *јединицу*; број, био цео или разломљен који нам ту садржину показује, зове се измерена *вредност* дате величине. Према томе свака одређена (конкретна) величина мора имати два дела: 1, име оног одређеног броја, који казује колико има јединица у мереној величини и 2, име јединице, које се дода после тог броја.

Означимо на пример са a јединицу којом хоћемо да измеримо неку дату величину x. Пошто смо упоређивање величине x са јединицом a извршили т. ј. пошто смо x измерили, рецимо да смо нашли вредност од m јединица; онда из дате величине x, јединице a и нађене вредности m постоји овај алгебарски однос

$$x = ma \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (142$$

Таких величина као што је x, има у природи врло много и разних врста; исто тако су многобројне и јединице a којима се оне мере. Величине као што су: дужина, ширина, запремина, тежина, време, брзина, убрзање, угао, количина убрзања и кретања, маса, густина, разни моменти, рад, итд. итд. захтевају нарочите јединице, еда би се могле измерити. Мућу тим, кад се мало боље загледа у све те а и друге разне величине, види се, да се многе од њих могу измерити једном истом јединицом, те дакле да нам није увек потребан исти број и јединица колико имамо и величина да измеримо. На пример, и дужину и ширину и запремину можемо измерити једном истом јединицом: дужином. Зато ћемо ми на овом месту из ближе испитати однос разних јединица међу собом, као и према величинама, које имамо да меримо, па ћемо онда да одредимо, које су нам јединице неопходно потребне, а које се могу из њих, као из основних јединица, извести.

Вратимо се горњем примеру, где смо величину x мерили јединицом a. То би било на пример, кад би дужину каквог пута хтели да измеримо метром (a). Но ако би исти тај пут x хтели да меримо другом којом јединицом на пример километром, a', онда би по свршеном мерењу нашли не m, већ m' јединица a' т. ј. километара те би иста дужина пута била изражена новом јединицом у овом облику:

$$x = m'a' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (142'$$

који кад упоредимо са првим, добијамо

$$\frac{m}{m'} = \frac{a'}{a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (143$$

што значи, да број, који означава вредност неке измерене количине, стоји у изврнутом односу са променом саме јединице, т. ј. ако јединица расте, тај број опада.

271. **Врсте јединица.** — Ми смо посматрали случај, где се променила *величина* јединице. Али се може десити да се промени не само величина него и *врста* јединице, а величина коју ваља мерити остаје иста. И такво се мерење може да изврши, само треба да је познат однос између тих јединица разних врста. Нека нам је дата извесна површина p да измеримо; ми је најпре можемо измерити дужинама на пример метром или хватом и т. д., кад пристанемо да као јединицу површине сматрамо квадратни метар или квадратни хват. И пошто знамо из геометрије да је површина на пример једног правоугаоника

равна производу из две његове стране s и s', онда је величина површине у квадратним метрима или хватима

$$p = s \quad s'$$

где су стране s и s' мерене метрима или хватима.

Довде ми још нисмо променили врсту јединице. Али кад би се захтевала иста површина правоугаоника изражена не квадратним метрима или хватима, него данима орања, онда образац за површину не би могао више изгледати као мало час, него би имао овај облик:

$$p' = \alpha s s' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (144$$

где p' опет значи површину али изражену данима орања, s и s' су стране правоугаоника мерене метром или хватом (јер дужине меримо само дужинама), а α је извесан сталан број, чинилац, или коефицијенат, који показује, какав однос постоји између дана орања и квадратних метара или хвати.

Ми можемо још тачније да одредимо значај коефицијента α. Ставимо $s = s' = 1$.

Онда је

$$\alpha = p' = 1$$

а то значи да α представља у данима орања површину једног квадрата коме је свака страна дугачка један метар или један хват; т. ј. α казује, који део дана орања долази на један квадратни метар или хват.

Узмимо један пример из физике. Експериментом се дознало да је привлачна или одбојна снага, која дејствује између две електричне или магнетне тачке, изврнуто сразмерна квадрату одстојања. Та снага зависи од количине електрицитета или магнетизма, нагомилане у тим тачкама и њима је управо сразмерна; с друге стране, она опада са квадратом одстојања. Па пошто као и мало час хоћемо да меримо неку величину јединицама, које нису исте врсте са њом, хоћемо да меримо снагу са количинама, то ће нам образац изгледати

$$f = \varphi \frac{q q'}{r^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (145$$

где су q и q' дате количине електрицитета или магнетизма, r њихово остојање, f дејствујућа снага, а φ опет неки сталан број или коефицијенат, који служи да се пређе из јединица за снагу ка јединицама за количину. Кад и овде ставимо $q = q' = 1$, а и $r = 1$, добијамо

$$\varphi = f = 1$$

што значи да је φ она снага, са којом се привлаче или одбијају две електричне или магнетне јединице на одстојању јединици.

272. **Апсолутно мерење.** — У свима мерењима, где су јединице произвољне, т. ј. где се величина, која се мери не изражава јединицама исте врсте, мора да се увуче и такав један коефицијенат за сваку врсту мерења, и он представља прелаз из јединице једне врсте ка јединици друге врсте, а његова величина зависи једино од избора тих јединица.

Међу тим ми смо видели да смо у стању, да се ослободимо тих коефицијената свевши их на јединицу, само ако изберемо згодне јединице за мерење. Тако на пример у првом случају, α би било $= 1$, кад би s и s' били равни јединици, т. ј. кад би површину мерили квадратом, коме би свака страна имала дужину један. У том би случају израз за површину изгледао простији

$$p = s\,s'$$

Исто тако видели смо, који су услови потребни па да и у другом примеру коефицијенат φ буде раван јединици у ком би случају образац био

$$f = \frac{q\,q'}{r^2}$$

И према томе, да ли ће коефицијенти у горњим а и у свима другим обрасцима бити равни јединици или не, т. ј. да ли ће обрасци у својим основним облицима бити без коефицијената или са њима, сва се мерења деле на две велике групе: на *апсолутна* и *релативна*. *И онај систем мерења, који се врши јединицама, у чијим основним обрасцима нема коефицијената, (т. ј. где су они равни јединици) зове се „систем апсолутног мерења“.*

Или на други начин: *Једна извесна величина одређена је у апсолутним мерама онда, кад број, који ту величину изражава, није основан на произвољној већ на са свим одређеној јединици исте врсте, на јединици, која према својој дефиницији зависи од извесних основних јединица, које су опште за све природне величине.*

Релативна се мерења зову још и *конвенционална, практична, земаљска* и т. д. мерења.

Наше старе мере, где се дужине мериле хватом, или стопом, или сатима хода, а површине данима орања нису биле апсолутне, јер је увек морао бити познат коефицијенат, који чини прелаз од хватова или стопа ка данима орања и обратно. На против, метарске су мере апсолутне, јер се дужина мери метром, површина квадратним метром, запремина кубним метром, те би и обрасци за површину и запремину били без икаквих коефицијената:

$$p = s\,s'; \; v = s\,s'\,s''.$$

273. До сад смо посматрали случај, где коефицијенат представља однос између величина две врсте. Но може се десити, да један образац са једним коефицијентом представља однос између величина n разних врста; у том се случају може изабрати таква вредност да за једну од тих врста коефицијенат буде раван јединици, а за осталу $n-1$ врсту, тај коефицијенат може имати ма какву вредност. И такав образац у коме је коефицијенат раван јединици зове се *одредни образац*. На пример, у метарском систему, одредни образац за јединицу површине јесте онај, који представља површину једног квадрата са странама равним јединици. И ако хоћемо том јединицом површине, да одредимо површину једног равностраног троугла, чија је страна $= s$, онда ће она бити дата обрасцем

$$p = \frac{\sqrt{3}}{4}\,s^2$$

где, ма да за извесну јединицу коефицијента нема, овде опет долази сталан чинилац $\frac{\sqrt{3}}{4}$. И обратно, као год што је за јединицу површине узет квадрат, тако се исто могла узети и површина једног равнокраког троугла чије су стране = 1. Али би онда, површина каквог правоугаоника, изражена површином тог троугла, имала бројни коефицијенат $\frac{4}{\sqrt{3}}$, јер би његова површина била:

$$p = \frac{4}{\sqrt{3}} s s'.$$

До истог би резултата дошли и кад би упоређивали површину круга са површином квадрата или троугла и обратно. Међу тим је очевидно, да у систему апсолутних мера, где су коефицијенти основних образаца равни јединици, да су бројни коефицијенти других, из њих изведених образаца врло прости, и њихова вредност представља извесан закон. Тако на пример коефицијенат $\frac{\sqrt{3}}{4}$, који улази у образац за површину равностраног троугла, изражену површином квадрата, показује, да је однос, који постоји између површине једног равностраног троугла и површине неког квадрата, чије су стране једнаке странама троугла, увек сталан и раван $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

274. Основне и изведене јединице. — Одређујући образац за површину било квадрата, било равностраног троугла или круга, видели смо, да се она добија из јединица дужине, међусобним множењем, (не водећи рачуна о сталном коефицијенту који их прати). Тако је површина квадрата $= s^2$; код површине равностраног троугла долази иста страна на квадрат и још један сталан чинилац и т. д., те према томе можемо рећи, да је јединица површине *изведена* из јединице дужине, која би се узела као *основна* јединица, и да је другог степена према тој основној јединици. Исто би тако, јединица запремине, изражена јединицом дужине била трећег степена према њој и т. д.

Узмимо да нам је опет дата величина x да измеримо али рецимо да њена јединица а није непосредна, већ да је она изведена из неке друге јединице α, према којој је она неког извесног степена n и између којих постоји овај однос

$$a = \alpha^n$$

и кад сад заменимо a биће

$$x = m\,a = m\,\alpha^n.$$

Ако променимо јединицу a као мало час имаћемо:

$$x = m'a' = m'\alpha'^n$$

одакле

$$\frac{m'}{m} = \left(\frac{\alpha}{\alpha'}\right)^n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (146$$

то ће рећи, да се вредност величине x сматрана као изведена, мења у изврнутом односу са степеном првобитне јединице.

За то, вредност неке површине постане 100 пута већа, кад се дужине изразе јединицама 10 пута мањим.

Ако још прва јединица a не зависи само од једне првобитне јединице α него од више њих у исти мах, на пример од α, β, γ и ако она стоји према њима тако, да вреди овај однос

$$a = \alpha^n\,\beta^p\,\gamma^q$$

онда се величина x мења изврнуто са n-тим степеном од α, и степенима p и q од β и γ.

Као пример нека нам послужи образац за једнако кретање

$$s = c\,t$$

одакле имамо

$$c = \frac{s}{t}.$$

То значи, да је брзина изражена двема разним јединицама: дужином и временом, и то тако, да је она према дужини степена $= 1$ а према времену степена $= -1$. И ако се сад јединица дужине 10 пута увећа а јединица времена 10 пута смањи, онда ће брзина бити изражена бројем 100 пута већим но у првом случају.

Исто тако на пример и јединица за рад зависи од више разних јединица и у разним степенима. Као што ћемо доцније видети, она зависи и од дужине и од времена и од масе и то тако да је она према дужини другог степена, према маси првог а према времену minus другог степена.

— Као што видимо, јединице за површину и запремину изведене су из јединица за дужину и нису ништа друго, до виши степени јединице за дужину. С тога би се јединица за дужину у овом случају назвала *основна јединица* а ове друге *изведене јединице.*

Изложилац, који показује кога је степена изведена јединица у односу према основној јединици, зове се *димензија изведене јединице.* Тако би површина била јединица друге, запремина јединица треће димензије или трећег степена према дужини.

А општа једначина

$$a = \alpha^{n} \beta^{p} \gamma^{q} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (147$$

зове се *једначина димензија* изведене јединице a према основним јединицама α, β, γ. Скуп основних јединица α, β, γ, зове се *систем основних јединица.*

275. **Избор основних јединица.** — Избор основних јединица изгледа да је са свим произвољан, јер сваки алгебарски израз као што је онај $a = \alpha^{n} \beta^{p} \gamma^{q}$, у коме су изражени односи јединица, може бити решен по ма коју од тих јединица, која ће бити основна, а све остале зависиће од ње и биће од ње изведене. И руковођени том слободом, разни су научари бирали разне основне јединице имајући увек на уму, да те јединице буду што простије.

И ако са чисто математичког гледишта изгледа, да је избор основних јединица сасвим слободан, ипак са гледишта реалног тај избор није баш сасвим произвољан. Наш је задатак да упоређујемо, т. ј. да меримо појаве, које у целој природи посматрамо, па дакле наше основне јединице морају се прилагодити потребама самих тих појава. И у место да бирамо основне јединице са чисто апстрактног гледишта, ми ћемо да се обазремо на оно, из чега је управо природа састављена, па ћемо дознати, које су нам јединице потребне да тај основни састојак природе, па дакле и све остале, измеримо.

Проучавајући напред састав природе, дошли смо до закључка, да у њој постоји само *енергија* $\left(\frac{m v^2}{2}\right)$ или *рад* (Ps), који је управо само један облик енергије.

Ми смо напред показали, којим путем долазимо до тог закључка, а сад ћемо тражити, које су нам основне јединице потребне да измеримо енергију и рад. Јер кад за њих одредимо потребне јединице, онда ће нам оне послужити и за све остале величине, које нису ништа друго до разне врсте енергије и рада.

Енергија је као што знамо половина производа из масе и квадрата брзине. Масу можемо мерити само масом и ничим другим што значи да ће маса бити једна основна врста мере. Брзина је сложен појам из пута и трајања; пут као што знамо меримо дужином, а трајање временом; дужина и време не дају се ничим мерити до опет дужином и временом, што значи да су то просте а не изведене величине. Према томе да би ма какав облик енергије могли измерити, потребне су нам ове три основне врсте мера: *дужина*, *маса* и *време*.

Да видимо какве су нам основне мере потребне да измеримо рад. Рад је као што знамо производ из силе и пута. Мало час смо видели да се пут мери дужином, и дужина ће нам бити прва основна мера за мерење рада. Сила је већ сложенији појам и добија се из масе и убрзања, јер је сила у самој ствари количина убрзања $= ma$. Маса је количина материје у неком телу и не да се извести из других простијих јединица; с тога ће маса бити друга основна врста мере за мерење рада. Међу тим убрзање је сложен појам: то је промена брзине за једну секунду $= \frac{v - v_0}{t}$. Брзина опет са своје стране је сложен појам из пута и времена па дакле јединице, којима се мери брзина а са њом и убрзање своде се на мерење пута, дужином и мерење трајања, временом. Нова врста мере коју смо нашли овом анализом јесте време, и то ће бити трећа основна врста мера за рад. Из тога закључујемо, да се ма каква количина рада и ма каквог он облика био, може увек измерити нађеним трима основним врстама мера: *дужином*. *масом* и *временом*.

Силом околности смо дакле принуђени да изберемо горње три врсте мера за основне мере јер њима можемо измерити све природне појаве и величине. Међу тим француски научари, руковођени другим разлозима беху усвојили *дужину*, *време* и *силу* као основне врсте јединица. Ми смо видели да је сила и сувише сложен појам да би се могла узети за основну врсту јединица. Британско учено друштво, усвојило је било такође, време и масу, али није било руковођено разлозима, које смо ми горе извели.

276. Међу свима разним мерама за дужину данас и у науци и у практици служи већином метарски систем. У теорији, метар представља десет милионити део квадранта, оног земљиног меридијана што пролази кроз Париз. Тај је меридијан измерила нарочита француска „комисија за мере и тежине", и према горњој одредби, начинила 1799 године једну платинску полугу чија дужина на 0° представља дужину једног метра. И та платинска полуга, која се и данас чува у француској архиви, представља у практици дужину једног метра и са ње су копирани сви садањи метри којих има у свима државама. Је ли та платинска полуга, што представља основни метар одиста десет милионити део квадранта париског меридијана или није, то је друго питање; у данашњој практици се та дужина зове метар па ма каква била тачност са којом је она у своје време одређена.

Познато је свима, да су са те основне мере створене још друге мере за дужину, неке веће а неке мање, но које су све удешене по десетном систему.

За мерење времена узето је трајање једног земљиног обрта око осе. Цело то трајање подељено је на 24×60^2 делова и такав један део, *једна секунда* средњег сунчаног времена служи као основна јединица за време.

Споменули смо мало час да су француски научари усвојили били силу т. ј. тежину за трећу врсту јединица, док је енглеско учено друштво узело масу. Ми смо видели да је сила сложенији појам од масе и незгодна је за јединицу и с тога, што сила или тежина не остаје на свима местима на земљи једна и иста него се са географском ширином мења. На против маса, не само да је прост појам количине материје, него је и независна од географске ширине. Док се тежина једног истог тела мења на свакој другој географској ширини, дотле његова маса остаје не промењива и стална не само за целу земљу него за ма које небеско тело.

Као јединица тежине, из које се изводи маса служи данас „основни килограм“ који се заједно са основним метром чува у француској архиви.

277. У досадањем избору врста мера, били смо руковођени самим природним појавама, те смо, тако рећи, били принуђени да усвојимо горње три врсте мера за основне. Али сад долази друго питање, које се решава на сасвим произвољан начин. Горњом анализом дошли смо до закључка да нам једна основна врста мере буде дужина и рецимо да смо између разних система мера за дужину изабрали метарски систем, као најпростији. Али коју ћемо од метарских дужина узети за основну јединицу са којом ћемо све остале дужине изражавати, да ли километар, или метар или сантиметар и т. д.? За мерење масе наступио би исти случај као и за мерење времена. Имали би да бирамо између масе једнога килограма или грама или милиграма и т. д. или између трајања једне године, дана, минуте и т. д.

Па онда, пошто смо, рецимо изабрали у свима трима врстама мера, по једну као основну јединицу, онда настаје тешкоћа у избору извесних јединица. Јер кад смо утврдили основну јединицу за дужине, онда којом ћемо јединицом мерити површине, да ли квадратом коме је свака страна равна тој јединици дужине, или равнокраким троуглом коме су стране једнаке опет тој јединици или на послетку кругом кога је полупречник или пречник раван истој јединици? За запремине остају иста питања, као и за све друге изведене јединице.

У самој ствари тако је и било. Разни народи служили су се не само разним мерама него и кад су им мере биле исте они су узимали разне јединице из тих мера за основне јединице. Тако на пример сви су се научари били сложили да за дужине и тежине усвоје метарски систем, али док су једни (Гаус и Вебер) усвојили за основне јединице милиметар и милиграм, дотле су други (Британско Учено Друштво) усвојили сантиметар и грам. Сасвим је било потребно да се у том погледу усвоје један пут за свагда основне јединице за апсолутно мерење и то је постигнуто на међународном конгресу електричара држаном у Паризу 1881 год. приликом прве електричне изложбе. На том конгресу усвојене су за основне врсте мера: *дужина*, *маса* и *време*; даље, за јединицу дужине усвојен је сантиметар, за јединицу масе, маса једног грама, а за јединицу времена, једна секунда. Ове три последње јединице зову се *апсолутне основне јединице*, и за свако мерење које се у тим јединицама изрази каже се, да је извршено *„у апсолутним мерама“*, или *„у систему сантиметар — грам — секунда“* или најзад симболички *„у систему C. G. S.“* (Ц. Г. С.).

Из горњих основних јединица изведене су још многе друге јединице. Ми ћемо у кратко и једне и друге прегледати.

А. Основне апсолутне јединице.

278. **Јединица за дужину.** — То је стоти део оног основног метра, што је начињен од платине и одређен на 0° и који се чува као што смо видели, у париској архиви. У оно доба кад је тај метар одређиван, он је био један десет милионити део квадранта париског меридијана. Данас се дознало, да се та мерења нису могла извршити са довољном тачношћу те према томе ни данашњи практични основни метар не одговара потпуно својој теориској дефиницији. (По новијим одредбама спљоштености земљине излази, да је четвртина меридијанске елипсе дугачка 10,000856 метара). Било како му драго, опет је она мера, коју ми називамо метром стална и непромењива, те се све остале могу са њом сравњивати. То што вреди за основни метар вреди и за његов стоти део, т. ј. за основни сантиметар, који је изабрат за основну јединицу дужине апсолутног мерења. Јединица дужине бележи се симболички писменом L.

279. **Јединица за масу.** — То је хиљадити део оне масе, од платине, која представља један килограм; то је маса једног грама.

По решењу народног конвента француског, килограм је тежина једног кубног десиметра дестилисане воде од 4° Целз., измерене у безваздушном простору, на морској површини и на 45° геогр. ширине. Требало је дакле, да килограм има исту масу какву има и један кубни десиметар дестилисане воде, од 4° Ц. Међу тим услед извесних грешака, које је немогуће било избећи у оно доба, тај основни килограм нешто је лакши од правог килограма, те према томе ни маса једног кубног сантиметра дестилисане воде, т. ј. ни маса једног грама, није хиљадити део правог килограма, већ оног што је практички израђен. Јер један кубни сант. дестилисане воде нема масу $= 1 \cdot 000000$ него $= 1 \cdot 000013$; а она маса, која се данас узимље за основну јединицу не одговара води од 4^0 Ц. него води од $2 \cdot 85^0$ Ц. или оној од $5 \cdot 15^0$ Целз.

Јединица масе бележи се симболички писменом M.

280. **Јединица за време.** — Видели смо већ напред да је за основну јединицу времена узет $\frac{1}{24 \times 60^2}$ део трајања целог једног земљиног обрта око осе, т. ј. једна секунда средњег сунчевог времена.

Јединица за време бележи се симболички писменом T.

В. Изведене јединице.

281. **Јединица за површину.** — Као јединица површине у апсолутном мерењу узима се квадрат, кога је свака страна равна јединици дужине, т. ј. један квадратни сантиметар. Пошто је површина квадрат дужине L, то је и димензија јединице површине $= L^2$.

282. **Јединица за запремине.** — То је запремина једне коцке, које је свака страна равна јединици дужине, т. ј. један кубни сантиметар. Њена је димензија $= L^3$.

283. **Јединица за густину.** — Пошто се густина одређује деобом масе са запремином то је *јединица густине она густина, коју има јединица масе кад заузме јединицу запремине*, Димензије густине су према томе $= ML^{-3}$.

284. **Јединица за углове.** — Угао се увек изражава одговарајућим луком, подељеним полупречником. Пошто се и лук и полупречник мери дужинама, то ће и димензије угла бити $= L^0$, т. ј. угао је независан од изабраних основних јединица.

285. **Јединица за брзину.** — Брзином v називамо пређени пут подељен временом или пут за јединицу времена. И ако са s означимо пут а са t време, биће $v = \frac{s}{t}$.

Пошто се пут мери дужином то је и брзина $v = \frac{L}{T} =$

$= LT^{-1}$. *Јединица је брзине она брзина, услед које неко покретно тело, крећући се једнако, пређе јединицу пута за јединицу времена.*

Брзина звука, која износи 330^m у секунди изражена апсолутним јединицама износи 33×10^3. Брзина је светлости 300000 км.: у систему C. G. S. она износи 3×10^{10}.

286. Јединица за угловну брзину. — То је брзина оне тачке у телу, која се налази на остојању $= 1$ од обртне осе; дакле $u = \frac{2\pi}{T} = T^{-1}$

287. Јединица за убрзање. — Ако брзина није стална него се мења, онда се цела та промена, подељена временом за које је она извршена, зове убрзање, $a = \frac{v - v_0}{t}$

Према томе је убрзање или акцелерација промена брзине за јединицу времена. Што се тиче димензије убрзања она ће се одредити из брзине и времена; пошто су димензије брзине LT^{-1}, то је очевидно да ће димензије убрзања бити LT^{-2}.

Јединица убрзања код тела, које се једнако променљиво креће биће она, где се брзина промени за јединицу дужине у јединици времена. —

Убрзање земљине теже биће у апсолутним јединицама $= 981{\cdot}0$. јединица C. G. S.

288. Јединица за силу. — *дин* — Под силом разуме се у механици количина убрзања т. ј. *ma*, а то је промена кретања, коју је у маси *m*, изазвало убрзање *a*. Према томе, *јединица силе, биће она количина убрзања, која за јединицу времена, произведе на маси равној јединици, убрзање равно јединици* или још, *она се сила рачуна као јединица, која ће дејствујући једну секунду на граммаси произвести убрзање од једног сантиметра.*

Та јединица силе добила је нарочито име *„дин."* (од грчке речи *δύναμις* = сила). Према томе, тежина једног грама, која убрзава своју масу на географској ширини од 45° а на морској површини за 980·606 јединица C. G. S. вреди 980·606 дина. Одавде следује да

један милиграм вреди 0·9806 дина

један грам вреди $0{\cdot}9806 \times 10^3$ дина или 0·9806 килодина један килограм вреди $0\,9806 \times 10^6$ дина или $0{\cdot}9805$ мегадина.

Као што се види, јединица силе је прилично мала и у округлој цифри износи један милиграм јер је

$$\text{један дин} = \frac{1 \text{ гр.}}{980\,606} = 0{\cdot}001098 \text{ гр.}$$

а један милијун дина т. ј. један мегадин = 1020 гр. дакле = снази мало већој од једног килограма.

Ако хоћемо да нађемо вредност грама изражену дином на разним географским ширинама φ и висинама h над морском површином, ваља се послужити овим обрасцима где је убрзање изражено у јединицама C. G. S. т. ј. у сантиметрима:

$$g^{cm} = 980{\cdot}606 - 2{\cdot}5028 \cos 2\varphi - 0{\cdot}000003\ h.$$

Кад се по томе обрасцу одреди убрзање теже, онда се из ње може добити вредност дина у грамовима и обратно а за дотично место на овај начин:

$$1 \text{ дин} = \frac{1 \text{ гр.}}{g^{cm}}$$

$$1 \text{ грам} = g^{cm} \text{ дина.}$$

На разним географским ширинама потребан је разан број динова да се подигне једна граммаса. На пример, тежина

1 грама	на полу	= 983·11	дина
»	у Берлину (52°30)	= 981.25	»
»	у Паризу (40°50)	= 980.94	»
»	у Београду (44°48')	= 980.60	»
»	на екватору	= 978.10	»

Ако јединица силе, т. ј. дин, дејствује на неку масу, m, онда ће она изазвати после једне секунде брзину не $= 1^{cm}$ него

$$\text{брзину} = \frac{1^{cm}}{m}, \text{ одакле}$$

$$m \times \text{брзином} = m \cdot v = 1.$$

А то значи: *Дин је она снага, која утичући за једну секунду ма на какву масу m произведе јединицу количине кретања.*

Што се тиче димензија силе, лако је увидети да су оне $= LMT^{-2}$.

289. **Јединица за интензитет гравитационог поља.** — Простор, у коме се осећа привлачна моћ некога небеског тела зове се гравитационо поље тога небеског тела. И кад се говори о интензитету гравитационог поља на пример земљинога, ту се обично разуме интензитет или јачина привлачења у том гравитационом пољу. Интензитет гравитационога поља за неко место (тачку) потпуно је одређен масом и силом, која ту масу привлачи и то тако, да је тај интензитет управо сразмеран сили P а изврнуто сразмеран маси M. Према томе димензије интензитета у гравитационом пољу биће:

$$\frac{P}{M} = \frac{LMT^{-2}}{M} = LT^{-2}$$

и оне су као што видимо истоветне са димензијама убрзања. Често се тај интензитет назива „убрзавајућа снага гравитације или привлачења".

На неком извесном месту гравитационога поља, онај ће интензитет тога поља бити раван јединици, кад јединица силе т. ј. дин привлачи јединицу масе, т. ј. грам. То се обично представља изразом:

$$\frac{\text{дин}}{\text{грам}} \quad \text{или} \quad \frac{\text{с.м.}}{\text{сек.}^2}$$

а чита се *„дин на грам"*.

Интензитет земљиног (или телуричног) гравитационог поља *g* познат је тачније само за тачке на њеној површини и износи као што смо видели на екватору 978 $\frac{\text{см.}}{\text{сек.}^2}$, на полу 983 $\frac{\text{см.}}{\text{сек.}^2}$ а у Београду 981 $\frac{\text{см.}}{\text{сек.}^2}$, или 981 $\frac{\text{дин}}{\text{грама}}$ (у округлим цифрама).

290. **Јединица за количину кретања.** — Количина кретања је производ из брзине и масе. Према томе димензије те јединице биће $= LMT^{-1}$. *Јединица за количину*

кретања биће она количина, коју изврши јединица масе са јединицом брзине за јединицу времена.

291. Јединица за рад. — *ерг* — Рад постаје, кад сила своју нападну тачку покреће и извршени је рад сразмеран величини силе P и пређеном путу s. Ако се задржимо код најпростијег случаја, да је рад раван производу из силе и пута $R = Ps$, онда јединица рада јесте онај рад, који изврши *јединица силе (дин) померивши своју нападну тачку за јединицу дужине (један сантиметар).*

Та се јединица рада зове „*ерг*" (од грчке речи ἔργον = дело, рад, енергија).

Према томе, кад граммаса падне са висине од 1^{cm} услед дејства теже т. ј. услед дејства g^{cm} дина или грам-сантиметара, онда је она извршила рад од g^{cm} ерга. Отуда изводимо још и ове односе у опште:

$$1 \text{ грам-сантиметар} \cdots = g^{cm} \text{ ерга.}$$

$$1 \text{ ерг} \cdots\cdots\cdots = \frac{1 \text{ гр см.}}{g^{cm}}$$

$$1 \text{ килограм метар} \cdots = g^{cm} \times 10^5 \text{ ерга}$$

$$1 \text{ ерг} \cdots\cdots\cdots = \frac{1 \text{ кгрм.}}{g^{cm} \times 10^5}$$

За Београд и на морској површини:

$$1 \text{ грам-сантиметар} \cdots = 980{\cdot}60 \text{ ерга}$$

$$1 \text{ ерг} = \frac{1 \text{ гр.см.}}{980{\cdot}60} \cdots = \frac{102}{10^5} \text{ гр. сант.}$$

$$1 \text{ килограм метар} \cdots = 980{\cdot}60 \times 10^5 \text{ ерга}$$

$$1 \text{ ерг} = \frac{1 \text{ к.мет.}}{980{\cdot}60 \times 10^5} \cdot = \frac{102}{10^{10}} \text{ мет. килогр.}$$

Ако би се десио случај, да ваља претворити какве старе мере у ергове, на пример стопне фунте или стопне оке и т. д. онда ваља поступити на овај начин:

Ваља одредити однос старих мера према новим, тако да је на пример једна стопа $= m$ метара а једна фунта или једна ока $= n$ килограма; онда ће једна стопна фунта или стопна ока имати

$$(m \times n) \text{ метар-килограма.}$$

Ако се претварање врши за неку географску ширину φ где је убрзање теже, по горњем обрасцу одређено $= g^{cm}$ онда је

$$\text{један килогр. мет.} = g^{cm} \times 10^5 \text{ ерга}$$

те ће најзад једна стопна фунта или стопна ока изнети

$$(m \times n) \times g^{cm} \times 10^5 \text{ ергова.}$$

На пример једна стопна ока колико износи ергова у Београду?

Једна ока има 1·280 кгр. а једна стопа 0·316 метара према томе једна стопна ока износи

$$0{\cdot}316 \times 1{\cdot}280 = 0{\cdot}404 \text{ метар. килогр.}$$

У Београду један метар-килограм има $980{\cdot}60 \times 10^5$ ерга, према томе једна стопна ока износи

$$396{\cdot}16 \times 10^5 \text{ ергова.}$$

Димензије јединице рада јесу $= L^2 M T^{-2}$.

293. **Јединица ефекта.** — Ефект је рад за јединицу времена т. ј.

$$e = \frac{R}{t} = L^2 M T^{-3}.$$

Јединица ефекта биће ерг за једну секунду.

Та је јединица и сувише мала за практику, јер је мува мотор, који врши ефекта за више таквих јединица. Већа јединица за ефект јесте у индустрији парни коњ а то је рад од 75 мет. кил. за једну секунду. За једну махину каже се да има снаге 10 коња (разуме се парних) кад изврши 750 кгр. мет. за секунду. Према томе биће у опште.

$$1 \text{ парни коњ} \cdots = g^{cm} \times 10^5 \times 75 \text{ ергова}$$

$$1 \text{ ерг} \cdots\cdots = \frac{1}{g^{cm} \times 10^5 \times 75} \text{ п. к.}$$

За Београд и на морској површини:

$$1 \text{ парни коњ} \cdots = 735{\cdot}45 \times 10^7 \text{ ергова}$$

$$1 \text{ ерг} \cdots\cdots = \frac{136}{10^{12}} \text{ парних коња.}$$

Парни коњ о коме је реч јесте француски, а њиме се служе и Италијани. Енглески парни коњ, (horse — power) је мало већи и $= 1{\cdot}0139$ франц. пар. коња. У Немачкој и Аустрији парни коњ има такође друге вредности. Ево тих вредности у ерговима:

Енглески коњ $= 745 \times 10^7$ ерга

Немачки коњ $= 738{\cdot}9 \times 10^7$ »

Аустријски коњ $= 746{\cdot}7 \times 10^7$ »

294. **Јединица енергије.** — Енергија се мери истом јединицом, којом и рад те према томе и за енергију вреди оно исто што смо рекли за рад. Димензије енергије биће као и димензије рада $= L^2 M T^{-2}$.

* * *

295. *Примедба.* — Поред тога, што нам се извесне природне величине, изражене јединицама апсолутних мера представљају у са свим другом, новом облику и што читајући њихове димензије дознајемо за њихове многе и важне особине, те нам димензије извесних природних величина могу згодно да послуже и за контролисање појединих природних закона. Примера ради да узмемо закон о слободном падању тела, који је представљен обрасцем:

$$s = g\,\frac{t^2}{2}$$

и кога је лева страна једна извесна дужина прве димензије (L). Ако је закон тачан треба и десна његова страна да буде исте димензије. И заиста, заменом појединих вредности с десне стране добијамо

$$L = L\,T^{-2} \cdot T^2 = L.$$

* * *

296. На завршетку овога одељка о апсолутним мерама, доносимо ради боље прегледности, ниже изложену таблицу до сада упознатих јединица.

НАЗИВ ЈЕДИНИЦЕ	ЗНАК	ОДРЕДБА	ДИМЕНЗИЈЕ
Дужина	s	s	L
Маса	m	m	M
Време	t	t	T
Површина	S	s s'	L^2
Запремина	V	s. s'. s''	L^3
Густина	δ	$\frac{m}{v}$	$M L^{-3}$
Угао	$\sphericalangle$	$\frac{s}{s'}$	L^0
Брзина	v	$\frac{s}{t}$	$L T^{-1}$
Угловна брзина . .	u	$\frac{2\pi}{t}$	T^{-1}
Убрзање	a,	$\frac{v - v_0}{t}$	$L T^{-2}$
Интентензитет гравитац. поља . .	g	$\frac{P}{m}$	$L T^{-2}$
Сила, тежина . . .	P, Q,	ma, mg,	$L M T^{-2}$
Количина кретања .	k	m v	$L M T^{-1}$
Рад	R	P s	$L^2 M T^{-2}$
Ефект	e	$\frac{R}{t}$	$L^2 M T^{-3}$
Енергија	E	$\frac{m v^2}{2}$	$L^2 M T^{-2}$